

Dipôle magnétostatique

Le but des calculs qui suivent est de montrer exactement qu'au loin, une distribution d'extension finie de courants est équivalente à l'ordre le plus bas à un dipôle magnétique^a. Ce calcul est mené en statique, ou plus généralement dans le cadre de l'ARQS magnétique.

Les notions requises correspondent aux bases de la magnétostatique, et il est nécessaire de manier un peu d'analyse vectorielle (classes préparatoires ou université, deuxième année).

1 Obtention du potentiel vecteur

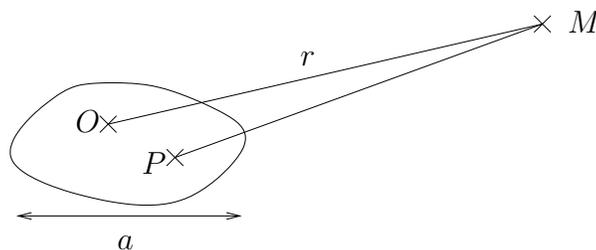
La première étape est de calculer un potentiel vecteur en jauge de Coulomb. On va distinguer tout d'abord le cas plus simple des courants filiformes avant de s'intéresser à une distribution volumique de courants.

1.1 Approximation dipolaire

Le premier point du calcul consiste à utiliser l'approximation dipolaire. Soit O un point quelconque caractéristique de la distribution, et M le point d'observation du champ. Alors

$$r = OM \gg a,$$

où a est l'extension spatiale de la distribution de courants.



Comme il faudra intégrer sur la distribution de courants, on est amené à s'intéresser à la distance PM , où P est un point courant de la distribution. Alors,

$$\overline{PM}^2 = (\overline{PO} + \overline{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\overline{PO} \cdot \overline{OM} = r^2 \left(1 - 2\frac{\overline{OP} \cdot \overline{OM}}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right).$$

^aLe moment dipolaire de la distribution est donc implicitement considéré comme non nul.

En effet, $OP \leq a$. On en déduit

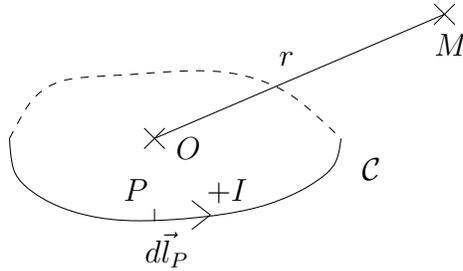
$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right).$$

Tous les calculs seront menés à cet ordre. On n'indiquera plus les termes négligés.

1.2 Courants filiformes

Soit une distribution filiforme finie de courants (boucle de courants). On évalue un potentiel vecteur \vec{A} en jauge de Coulomb :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l}_P}{PM}.$$



On remplace $1/PM$ par son expression obtenue au paragraphe précédent :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l}_P}{r} \left(1 + \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_C d\vec{l}_P + \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) d\vec{l}_P.$$

$r = OM$ est sorti de l'intégrale car la distance ne dépend pas du point du contour utilisé P , et I est indépendant du point le long du circuit (statique, ou ARQS magnétique). Le premier terme (dit monopolaire) $\oint_C d\vec{l}_P$ est nul car le circuit se referme sur lui-même.

Ensuite, $\oint_C (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) d\vec{l}_P = \vec{S} \wedge \overrightarrow{OM}$ (voir la partie 1 de l'annexe).

On en déduit au total

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{OM}}{r^3} \quad (1)$$

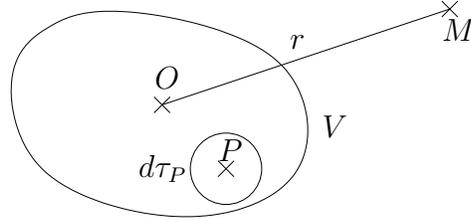
où

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S} \quad (2)$$

est le moment dipolaire magnétique de la distribution.

1.3 Courants volumiques

On va généraliser le résultat précédent pour une distribution volumique finie de courants, et obtenir l'expression du moment magnétique correspondant.



Un potentiel vecteur est

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P) d\tau_P}{PM}.$$

Là encore, on réalise l'approximation dipolaire pour $1/PM$:

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_V \vec{j}(P) \left(1 + \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OM}}{r^2}\right) d\tau_P.$$

Le premier terme est nul car $\iiint_V \vec{j}(P) d\tau_P = \vec{0}$ ^b.

Il reste à évaluer le second terme

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \iiint_V (\vec{OP} \cdot \vec{OM}) \vec{j}(P) d\tau_P.$$

On montre (voir la partie 2 de l'annexe) que

$$\iiint_V (\vec{OP} \cdot \vec{OM}) \vec{j}(P) d\tau_P = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{OM},$$

où

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) d\tau_P \quad (3)$$

est le moment dipolaire de la distribution.

Ainsi, le potentiel vecteur vaut

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{OM}}{r^3}. \quad (4)$$

^bLe plus simple est de découper le volume en tubes de courants se refermant sur eux-mêmes. Sur chacun de ces tubes T , I est constant et donc l'intégrale est nulle car $\iiint_T \vec{j} d\tau = \oint I d\vec{l} = I \oint_{C_T} d\vec{l} = \vec{0}$. Plus quantitativement,

$$\iiint_V j_x(P) d\tau_P = \iiint_V (\vec{\text{grad}} x_P \cdot \vec{j}(P) + x_P \text{div } \vec{j}(P)) d\tau_P = \iiint_V \text{div}(x_P \vec{j}(P)) d\tau_P = \iint_S x_P \vec{j}(P) \cdot d\vec{S},$$

où S est la surface délimitant V (on a utilisé $\text{div } \vec{j} = 0$ en régime stationnaire ou ARQS magnétique). Comme sur les points de S , $\vec{j} \perp d\vec{S}$ (le courant ne peut pas sortir de V par définition, et doit donc y faire demi-tour), on en déduit la nullité de l'intégrale.

1.4 Bilan

Ainsi, que la distribution soit filiforme ou volumique, l'expression (1) ou (4) du potentiel vecteur \vec{A} ne fait intervenir que le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de la distribution (expression (2) et (3)).

Il est essentiel de vérifier que les définitions des moments dipolaires ne dépendent pas de l'origine choisie (évident dans le cas filiforme, et conséquence de la nullité de $\iiint_V \vec{j}(P)d\tau$ dans le cas volumique). De même, on vérifie que la définition du moment magnétique (3) dans le cas volumique se réduit bien à celle (2) pour une distribution filiforme :

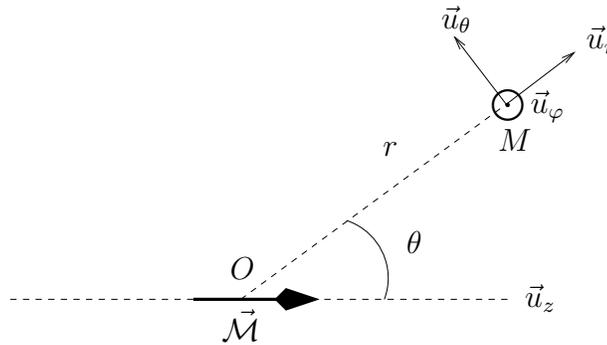
$$\frac{1}{2} \iiint_V \vec{OP} \wedge \vec{j}(P)d\tau_P \approx \frac{1}{2} \oint_C \vec{OP} \wedge I d\vec{l},$$

en remplaçant usuellement $\vec{j}d\tau$ par $I d\vec{l}$. Or $\vec{OP} \wedge d\vec{l} = \frac{1}{2} d\vec{S}^c$: on retrouve bien la formule du cas filiforme.

2 Champ magnétique

Il faut alors évaluer le champ magnétique $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Les coordonnées les plus adaptées pour l'exprimer sont les coordonnées sphériques d'axe $\vec{\mathcal{M}}$. Il y a en effet invariance par rotation autour de cet axe. De plus, tout plan contenant $\vec{\mathcal{M}}$ et le point d'observation M est un plan d'antisymétrie des courants^d, ainsi

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta)\vec{u}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta.$$



2.1 Utilisation des coordonnées sphériques

Il est possible d'évaluer \vec{A} en coordonnées sphériques :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^2} \vec{u}_\varphi.$$

^cOn rappelle que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est un vecteur normal aux deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} , de norme égale à l'aire du parallélogramme de côtés \vec{a} et \vec{b} .

^dAttention, tout plan contenant un moment dipolaire est est plan d'antisymétrie des courants comme on peut le constater en dessinant une petite boucle de courant ($\vec{\mathcal{M}}$ est un pseudo-vecteur).

L'utilisation d'un formulaire mène à

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} \begin{vmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad (5)$$

2.2 Expression intrinsèque

On part de

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{OM}}{4\pi OM^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \wedge \vec{\mathcal{M}} \right).$$

Ainsi,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right)$$

car $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$. On en déduit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} - \Delta \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right).$$

Comme

$$\text{div} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} = \frac{1}{r} \underbrace{\text{div} \vec{\mathcal{M}}}_0 + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \cdot \vec{\mathcal{M}} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{\mathcal{M}}.$$

Ensuite,

$$\Delta \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} = \vec{\mathcal{M}} \Delta \frac{1}{r} = 0 \text{ pour } r \neq 0,^e$$

on aboutit à

$$\vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

Sous cette forme, on arrive à un résultat très similaire au dipôle électrostatique. La quantité $\frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$ joue le rôle d'un potentiel magnétique scalaire. On retrouve alors typiquement l'expression (5) ou l'expression intrinsèque :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(3 \frac{(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{\mathcal{M}} \right).$$

2.3 Conclusion

L'expression du champ magnétique d'un dipôle magnétique est très similaire de celle d'un dipôle électrique. Notamment, la décroissance du champ est en $1/r^3$.

^ePlus précisément, $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$.

3 Annexe

3.1 Évaluation de $\oint_{\mathcal{C}} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) d\vec{l}_P$

Déjà, on remarque que \overrightarrow{OM} est constant dans cette intégrale. Soit \vec{K} un autre vecteur constant quelconque, alors

$$Y = \left(\oint_{\mathcal{C}} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) d\vec{l}_P \right) \cdot \vec{K} = \oint_{\mathcal{C}} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) \vec{K} d\vec{l}_P = \iint_S \text{rot} \left((\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) \vec{K} \right) d\vec{S},$$

où S est une surface quelconque s'appuyant sur \mathcal{C} , et le rotationnel concerne la variable P . Alors,

$$Y = \iint_S \left((\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) \text{rot} \vec{K} + \text{grad} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) \wedge \vec{K} \right) d\vec{S}.$$

Comme $\text{rot} \vec{K} = \vec{0}$ (\vec{K} est constant), et $\text{grad} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}^f$, on arrive à

$$\left(\oint_{\mathcal{C}} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) d\vec{l}_P \right) \cdot \vec{K} = \iint_S (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{K}) d\vec{S} = \iint_S (d\vec{S} \wedge \overrightarrow{OM}) \vec{K}.$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit \vec{K} (on peut prendre \vec{u}_x , \vec{u}_y puis \vec{u}_z), on peut en déduire

$$\oint_{\mathcal{C}} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) d\vec{l}_P = \iint_S d\vec{S} \wedge \overrightarrow{OM} = \left(\iint_S d\vec{S} \right) \wedge \overrightarrow{OM}.$$

3.2 Évaluation de $\iiint_V (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) \vec{j}(P) d\tau_P$

Considérons

$$\vec{Z} = \iiint_V (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{j}(P)) d\tau_P \wedge \overrightarrow{OM} = - \iiint_V (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}(P)) \overrightarrow{OP} d\tau_P + \iiint_V (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}) \vec{j}(P) d\tau_P.$$

Le second terme obtenu est celui qu'on désire évaluer. Il reste à travailler sur le premier, et intéressons-nous à sa projection sur l'axe x :

$$X = - \iiint_V (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}(P)) x_P d\tau_P = - \iiint_V \overrightarrow{OM} \cdot (x_P \vec{j}(P)) d\tau_P.$$

On remarque que (les opérateurs portent sur les coordonnées de P)

$$\text{div} \left((\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) (x_P \vec{j}(P)) \right) = (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) \text{div} (x_P \vec{j}(P)) + \text{grad} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) \cdot (x_P \vec{j}(P)).$$

Comme $\overrightarrow{OM} = \text{grad} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM})$ et $\text{div} (x_P \vec{j}(P)) = x_P \text{div} \vec{j}(P) + \vec{u}_x \cdot \vec{j}(P) = j_x(P)$ en régime stationnaire (ou ARQS magnétique), on obtient

$$\text{div} \left((\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) (x_P \vec{j}(P)) \right) = (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) j_x(P) + x_P \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}(P).$$

^fLe gradient porte sur les coordonnées de P . On a ainsi $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = x_P OM_x + y_P OM_y + z_P OM_z$, où OM_i sont les constantes. Prendre le gradient mène alors au résultat indiqué.

Il faut réexprimer X :

$$X = \iiint_V (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) j_x(P) d\tau_P - \iiint_V \operatorname{div} \left((\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM})(x_P \vec{j}(P)) \right) d\tau_P.$$

La seconde intégrale est égale au flux de $(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM})(x_P \vec{j}(P))$ sur la surface délimitant V : elle est donc nulle car les courants volumiques sont nécessairement orthogonaux à $d\vec{S}$ sur S .

Au total,

$$\iiint_V (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}) \vec{j}(P) d\tau_P = \frac{1}{2} \iiint_V (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{j}(P)) d\tau_P \wedge \overrightarrow{OM}$$