Introduction à la relativité restreinte

David Augier

Ce cours a été donné (en version courte) dans le cadre de la préparation aux olympiades internationales de physique (IPhO), donc pour des élèves de première année de CPGE. Le niveau de calcul et le formalisme requis sont très réduits (pas plus difficiles que des racines carrées) afin de se concentrer sur les concepts, qui eux ne sont pas élémentaires. Le contenu est donc abordable *a priori* dès la Terminale S, mais un peu de familiarité avec les raisonnements physiques et les changements de référentiels (galiléens) aidera sûrement le lecteur.

Un grand merci à Marc-Antoine Blain pour sa relecture attentive.

24 mai 2012

Table des matières

Introduction à la relativité restreinte

1 Événements, observateurs et référentiels

1.1 Référentiel

Dans la suite, on sera amené à utiliser un référentiel [1] de base $(\mathcal{R})$, que l'on peut se représenter comme le référentiel terrestre [2]. Un autre référentiel $(\mathcal{R}')$ est supposé animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ par rapport à $(\mathcal{R})$. Ce référentiel sera communément représenté comme lié à un wagon de train [3]. On suppose qu'à l'instant initial, les deux origines O et O' coïncident. Les deux référentiels sont alors dits en *configuration standard*. On se placera toujours dans ce cas par la suite.

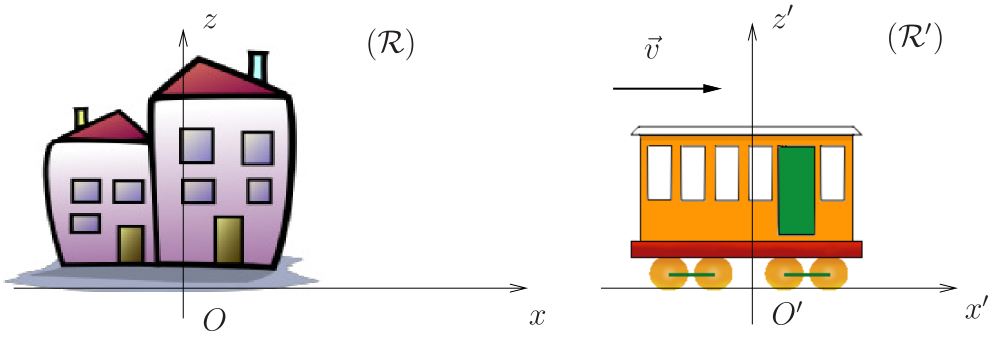


FIGURE 1 – référentiels de la gare et du wagon, configuration standard

1.2 Observateur

Un observateur est une personne ou machine munie d'une horloge et d'une règle (afin de mesurer des distances), et en pratique au repos par rapport à un référentiel donné.

1. On rappelle très rapidement qu'un référentiel est la donnée d'un solide (indéformable) par rapport auquel on va mener des expériences ainsi que d'une horloge fixe par rapport à ce solide.
2. On considère pour simplifier le référentiel terrestre comme galiléen.
3. On suivra là les habitudes d'Einstein dans ses expériences de pensées, destinées à expliquer les concepts de la relativité. On notera bien qu'avec les vitesses des trains, les effets relativistes restent en pratique très modestes, mais le principe de ces expériences de pensée reste valable.

On supposera pour "simplifier" que chaque référentiel dispose d'une véritable armée d'observateurs, chacun placé en chaque point, avec des horloges synchronisées. En un point donné, un observateur notera ce qu'il se passe juste devant lui en fonction du temps et pourra ensuite le communiquer. Cela constitue la manière la plus simple de procéder car alors aucun retard n'affecte les mesures de l'observateur [4]. En fait, un observateur donné peut aussi correctement surveiller un endroit quelconque, pas forcément juste devant lui. Avec une règle, il devra mesurer la distance qui le sépare du point d'observation afin de soustraire à sa mesure de temps la durée de propagation de la lumière. Le fait que les horloges soient synchronisées signifie en pratique que tous les observateurs liés à un référentiel attribueront les mêmes coordonnées, notamment temporelle. On n'évoquera plus par la suite les difficultés éventuelles rencontrées par les observateurs pour effectuer leurs mesures.

1.3 Événements

Un événement est la donnée d'un lieu de l'espace, repéré par ses trois coordonnées, ainsi que d'un temps. Ce peut être par exemple la collision de deux particules, l'arrivée d'un photon sur un obstacle ou un papillon (ponctuel) se posant sur une fleur (ponctuelle) (figure 2).

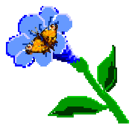
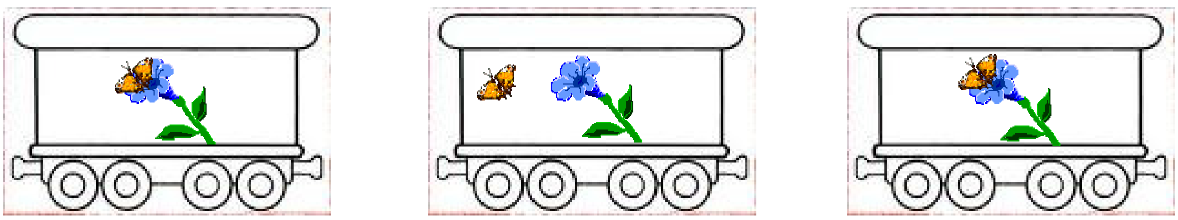


FIGURE 2 – événement "papillon se posant sur une fleur"

Exemple

Dans un wagon (référentiel associé $(\mathcal{R}')$), un papillon est posé sur une fleur. L'événement E_1 correspond à l'envol du papillon. Le papillon vole quelque temps et se pose à nouveau sur la fleur : c'est l'événement E_2 (figure 3).



événement E_1 événement E_2

FIGURE 3 – mouvement du papillon dans le wagon

On notera la différence des temps (le "prime" indique que les coordonnées sont repérées

4. En effet, suite au caractère fini de la vitesse de la lumière, observer un phénomène à une certaine distance implique l'observation avec retard. Par exemple, lorsque nous regardons le Soleil, nous le voyons tel qu'il était environ 8 minutes auparavant.

par rapport au wagon, c'est-à-dire dans $(\mathcal{R}')$) :

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \tau$$

En revanche, la différence de position entre les deux événements est nulle : pour un observateur du wagon, E_1 et E_2 ont lieu au même endroit :

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0$$

Un observateur fixe par rapport à la gare ne serait pas du même avis. De son point de vue, le wagon est en mouvement et donc le papillon commence et finit son mouvement en des endroits différents :

$$\Delta x \neq 0$$

Qui a raison : le papillon s'est-il globalement déplacé ou non ? Les deux observateurs ont chacun leur avis, et chaque avis est aussi correct que l'autre. Leur différence d'opinion n'engendre en fait aucune contradiction et la description physique est cohérente.

2 Physique newtonienne et ses insuffisances

Isaac Newton a énoncé en 1686 les bases des lois de la mécanique. Nous allons en rappeler quelques caractéristiques majeures.

2.1 Principe de relativité

Énoncé : les lois de la physique gardent la même forme par rapport à tout référentiel galiléen [5]. Dans les référentiels galiléens, l'espace est homogène et isotrope, et le temps homogène [6].

En d'autres termes, il n'existe aucun référentiel “absolu”. Tout référentiel galiléen est aussi bon qu'un autre pour étudier les lois de la physique. En conséquence, il n'est pas possible dans un wagon sans fenêtre et en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à la Terre de mesurer cette vitesse par une expérience physique. Une partie de ping-pong se déroulera de la même manière, c'est-à-dire en obéissant aux mêmes lois physiques, dans un gymnase ou dans ce train.

2.2 Transformation de Galilée

La transformation de Galilée permet de relier les coordonnées d'un événement par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$ et celles par rapport à un référentiel $(\mathcal{R}')$ en configuration standard

5. On parle aussi de référentiel inertiel.

6. Espace (temps) homogène : faire des expériences similaires en différents lieux de l'espace (à différents instants) donnera des résultats identiques. Espace isotrope : les différentes directions de l'espace sont équivalentes. Une expérience réalisée à la surface de la Terre montrera clairement une anisotropie de l'espace : les objets tombent vers le centre de la Terre. En fait, on interprète cette situation par un espace isotrope (et homogène) intrinsèquement, mais la présence de la Terre affecte l'isotropie et l'homogénéité. Cela signifie que si la Terre était supprimée, ainsi que les autres astres, l'isotropie et l'homogénéité seraient rétablies.

(figure 1). Elle s'exprime sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}} \tag{1}$$

Cette transformation peut aisément s'établir en considérant la figure 1 puis en projetant les égalités

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{O'O} = \vec{v}t$$

Une caractéristique immédiate et intuitive de la transformation de Galilée est le temps absolu. Tous les observateurs mesureront le même temps pour un événement donné (après synchronisation des horloges).

La composition des vitesses se déduit de la transformation de Galilée. On note $\vec{v}$ la vitesse de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ et on appelle $\vec{V}$ $(\vec{V}\,')$ la vitesse d'une particule par rapport au référentiel $(\mathcal{R})$ $((\mathcal{R}'))$. Alors, en dérivant l'expression (1),

$$\vec{V}\,' = \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx}{dt} - v \\ \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \vec{V}\,' = \vec{V} - \vec{v}$$

À une dimension (selon l'axe x), on retiendra donc

$$\boxed{V = v + V'} \tag{2}$$

On retrouve la composition des vitesses bien connue. Par exemple, si une personne marche dans un train, sa vitesse par rapport à la gare est la somme de la vitesse du train et de la vitesse de cette personne dans le train.

Exemple

Considérons à nouveau l'exemple du papillon, de la fleur et du train (figure 3). La transformation de Galilée permet d'exprimer la distance entre les deux événements pour un observateur fixe par rapport à la gare :

$$\Delta t = \Delta t' = \tau \qquad \text{et} \qquad \Delta x = \Delta x' + v\Delta t = 0 + v\tau = v\tau$$

Pour cet observateur, le papillon ne se pose pas les deux fois au même endroit. La distance séparant les deux événements s'identifie à la distance parcourue par le train pendant la durée τ concernée.

2.3 Insuffisance de la physique newtonienne

Tout ce qui précède semble cohérent **mais** pose des problèmes par rapport aux observations expérimentales. L'expérience interférométrique de Michelson et Morley en 1887 établit que la vitesse de la lumière est la même par rapport à tout référentiel galiléen [7]. Ce résultat est en contradiction flagrante par rapport à la composition des vitesses (2). Les résultats de cette expérience ont mené Einstein à établir les lois de la mécanique relativiste [8] (1905).

3 Relativité restreinte et transformation de Lorentz

3.1 Postulat de relativité restreinte

Énoncé

1. Les lois de la physique gardent la même forme par rapport à tout référentiel galiléen ; dans tout référentiel galiléen, l'espace est homogène et isotrope et le temps homogène ;

2. la vitesse de la lumière c est la même dans tout référentiel galiléen [9] et est la vitesse limite pouvant être atteinte par un corps. Dans la limite de vitesse faibles par rapport à c, les lois de la physique relativiste doient être similaires à celles de la physique newtonienne.

On pose $c = 299\,792\,458$ m.s^{-1}, et on retiendra $c \simeq 3.10^8$ m.s^{-1} .

7. Jusqu'alors, il était communément admis que la vitesse de la lumière $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ issue des équations de Maxwell était définie par rapport à un certain milieu/référentiel nommé éther. L'expérience de Michelson-Morley a montré plus précisément (par des mesures à différents moments de l'année) que la Terre ne pouvait pas être en mouvement par rapport à l'éther. De plus, un entraînement de l'éther par la Terre impliquerait des distorsions lors de l'observation d'étoiles lointaines. En conséquence, la conclusion retenue est la non-existence de l'éther et l'invariabilité de la vitesse de la lumière dans tout référentiel galiléen

8. Une controverse existe à ce sujet. Il n'est pas clair qu'Einstein connaissait au moment de l'établissement de la théorie de la relativité restreinte les résultats de l'expérience de Michelson et Morley (notamment, ceux-ci ne sont pas cités dans l'article original d'Einstein). Einstein a par la suite fait des déclarations contradictoires à ce sujet, disant en 1922 avoir eu connaissance de l'expérience pendant ses études puis affirmant en 1942 ne pas avoir entendu parler de l'expérience avant 1905. L'étude de lettres antérieures à 1905 et adressées à sa future épouse semble montrer que les premières déclarations doivent être considérées comme correctes. Plus consensuellement, l'expérience de Michelson et Morley fait certainement partie d'un ensemble de considérations qui ont mené Einstein à l'établissement de la relativité restreinte. En revanche, cette expérience est aujourd'hui considérée comme la preuve que les théories électromagnétiques à base d'éther ne présentent pas d'intérêt physique, sa suite logique dans la progression des idées étant l'établissement de la théorie de la relativité restreinte.

9. En fait, ce second point pourrait être inclus dans le premier : tout dépend de ce que l'on entend par "lois de la physique". Le postulat de relativité galiléenne lui donnait le sens de "lois de la mécanique" alors que celui de relativité restreinte lui attribue le sens de "lois de la mécanique et de l'électromagnétisme".

3.2 Transformation de Lorentz

Cette transformation remplace celle de Galilée (1). Lorentz avait remarqué que les équations de Maxwell restaient invariantes par cette transformation, mais Einstein les a établies à partir du postulat de relativité restreinte, puis interprétées physiquement (1905).

La transformation de Lorentz entre deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ en configuration standard (figure 1) de vitesse relative $\vec{v} = v\vec{u}_x$ de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ s'énonce (la démonstration est donnée en page 28) :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{array}\right. \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}} \tag{3}$$

Il est immédiat d'inverser cette expression, c'est-à-dire exprimer les coordonnées dans $(\mathcal{R})$ en fonction de celles dans $(\mathcal{R}')$ en remarquant que $(\mathcal{R})$ possède la vitesse $-\vec{v}$ par rapport à $(\mathcal{R}')$ [10] :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{vx'}{c^2}\right) \end{array}\right. \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

Le facteur γ défini ci-dessus est essentiel dans tout ce qui suit et sert souvent à quantifier les effets relativistes. Il vaut 1 pour une vitesse v nulle et tend vers $+\infty$ quand v tend vers c. On notera que pour les vitesses usuelles, $\gamma \simeq 1$. Par exemple, pour $v = 100$ km.h^{-1}, $\gamma = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon = 5,5.10^{-14}$. Finalement, pour $v = 0,99\,c$, $\gamma \simeq 7$.

La conséquence la plus frappante de la transformation de Lorentz est la non-trivialité de la relation entre les temps dans les deux référentiels : chaque observateur lié à un certain référentiel pourra mesurer des durées différentes de celles d'observateurs liés à d'autres référentiels. Les coordonnées d'espace et de temps sont davantage liées que pour la transformation de Galilée, on parle alors d'une structure d'*espace-temps*.

Nous allons détailler ces aspects ci-dessous.

10. Ce dernier point peut ne pas paraître évident. Soient deux observateurs Ob et Ob' fixes respectivement dans les référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$. Supposons que Ob mesure la norme v de la vitesse de Ob' dans $(\mathcal{R})$. Si Ob' mesure la vitesse de Ob dans $(\mathcal{R}')$ et trouve un résultat différent de v, il est alors possible de différencier expérimentalement les deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$, ce qui est contraire au principe de relativité.

3.3 Conséquences de la transformation de Lorentz

3.3.a) Limite classique

Si on considère la limite $v \ll c$, c'est-à-dire $\frac{v}{c} \ll 1$ de la transformation de Lorentz, alors $\gamma \to 1$ et cette transformation se réduit bien à celle de Galilée [11]. On retrouve les lois de la mécanique classique. Cette dernière reste donc valable pour les phénomènes concernant des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière.

3.3.b) Relativité de la simultanéité et de l'ordre temporel...

Considérons deux événements E_1 et E_2 se produisant au même moment mais en des endroits distincts pour un observateur du référentiel $(\mathcal{R})$. Pour fixer les idées, on peut imaginer un premier papillon se posant sur une fleur et un second sur une autre fleur (figure 4). Alors, entre les deux événements,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta x = x_2 - x_1 \neq 0$$

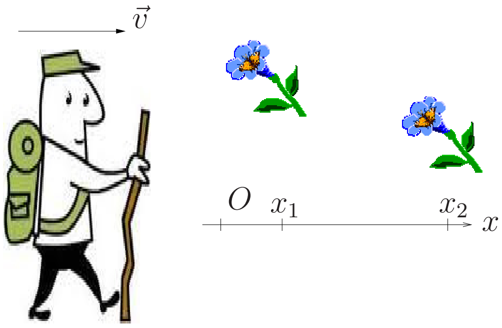


FIGURE 4 – papillons se posant sur des fleurs

Qu'en est-il pour un observateur en train de marcher à vitesse constante $\vec{v}$ (cet observateur sera donc lié au référentiel $(\mathcal{R}')$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $(\mathcal{R})$) ? L'application de la transformation de Lorentz (3) donne

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = -\gamma \frac{v \Delta x}{c^2} \neq 0 \qquad \text{avec} \qquad \Delta x = x_2 - x_1 \tag{5}$$

11. La relation $x' = x - vt$ est clairement obtenue vu que $\gamma \to 1$. En revanche, pour la transformation des temps, on aboutit à $t' = t - \frac{vx}{c^2}$. Les temps des deux référentiels coïncident bien en $x = 0$, ce qui exclut le phénomène de dilatation des durées. En revanche, il existe un problème de synchronisation des horloges, lié au fait que dans cette limite, la vitesse de la lumière reste toutefois indépendante du référentiel. De plus, les deux lois de transformation ainsi obtenues posent problème car en faisant deux changements de référentiels successifs (de $(\mathcal{R})$ à $(\mathcal{R})'$ puis $(\mathcal{R}'')$), la loi de transformation entre t'' et t n'est plus du même type. Par raison de cohérence, on est alors amené à poser $t' = t$. Cette approximation pose en pratique peu de problème. En effet, $vx/c^2 \approx 10^{-8}$ s pour x de la taille du rayon terrestre et une vitesse de 1000 km.h^{-1}, ce qui est peu important pour les applications en mécanique classique.

Pour lui, les deux événements sont non simultanés. *De son point de vue*, l'un ou l'autre peut s'être produit en premier.

Il faut ici apporter une précision essentielle. La non-simultanéité pour le marcheur n'est pas due à des temps différents de parcours de la lumière entre chaque fleur et l'œil du promeneur. L'armée d'observateurs liés au marcheur enregistre les dates des deux événements, puis les communique au marcheur. Il constate qu'elles sont différentes. Si le marcheur regarde directement les papillons et les fleurs, il faut ajouter les deux phénomènes : non-simultanéité **et** différence de temps de parcours de la lumière.

Cette situation de simultanéité ou non-simultanéité selon les observateurs ne pose en fait aucun problème de cohérence. Les deux événements E_1 et E_2 sont dits indépendants, c'est-à-dire qu'aucun n'est la conséquence de l'autre. Ainsi, n'importe lequel pourrait avoir eu lieu en premier, ce n'est qu'une question de point de vue.

Dans le même ordre d'idée, si un événement A a lieu avant un événement B dans un certain référentiel, rien n'assure en général que ce sera le cas dans un autre référentiel. Par exemple, l'expression (5) montre que le signe de l'intervalle de temps entre les deux événements décrits en figure 4 dépend du sens de déplacement du promeneur.

mais respect de la causalité

Néanmoins, cette relativité de l'ordre temporel entre deux événements n'est pas systématique. Considérons un chien au repos dans le référentiel $(\mathcal{R})$ observant de loin les papillons (figure 5). Le chien aboie dès qu'il **voit** le premier papillon se poser : l'aboiement constitue l'événement E_3.

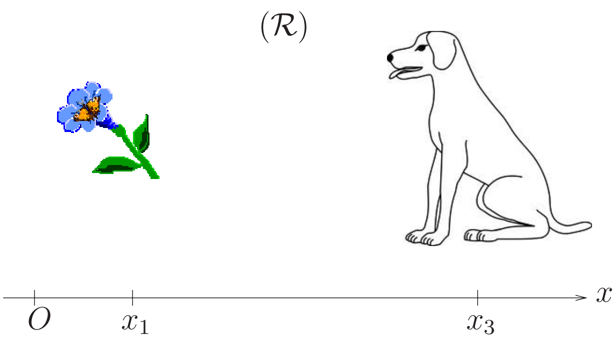


FIGURE 5 – chien observant un papillon

Alors,

$$\Delta t = t_3 - t_1 \geq \frac{|x_1 - x_3|}{c} > 0$$

En effet, le chien doit au préalable avoir vu le papillon se poser et la lumière met une durée $|x_1 - x_3|/c$ pour aller du papillon au chien. Pour un observateur de $(\mathcal{R}')$ comme le promeneur précédent,

$$\Delta t' = t'_3 - t'_1 = \gamma \left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2} \right) \geq \frac{\gamma}{c} \left(|\Delta x| - \frac{v\Delta x}{c} \right) > 0$$

Par conséquent, l'ordre des événements E_1 et E_3 reste le même pour les observateurs de tous les référentiels. Il en est ainsi pour les couples d'événements causaux, c'est-à-dire dont l'un est la cause de l'autre. On dit que la relativité restreinte est *causale* : pour tout observateur, la cause précède les conséquences.

Interprétation : flashs dans un wagon

Un exemple assez simple permet de comprendre comment l'invariance de la vitesse de la lumière a pour conséquence la relativité de la simultanéité. Une lampe située au milieu d'un wagon est allumée (figure 6). De la lumière est émise vers la droite et la gauche. On notera E_1 (E_2) l'événement caractérisé par l'arrivée de la lumière de la lampe sur la paroi gauche (droite) du wagon.

Il est clair que dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ du wagon les deux événements sont simultanés, soit $\Delta t' = 0$, avec $\Delta x' = l$, où l est la longueur du wagon. En revanche, pour un observateur situé au bord de la voie (donc lié à la gare), la lumière atteint le côté gauche avant le côté droit. En effet, le wagon avance et la lumière allant vers la gauche a une distance moindre à parcourir que celle allant vers la droite. La vitesse de la lumière étant une constante, on aboutit à la conclusion : $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$. La transformation de Lorentz (4) aurait directement aboutit au même résultat :

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right) = \gamma \frac{vl}{c^2} > 0$$

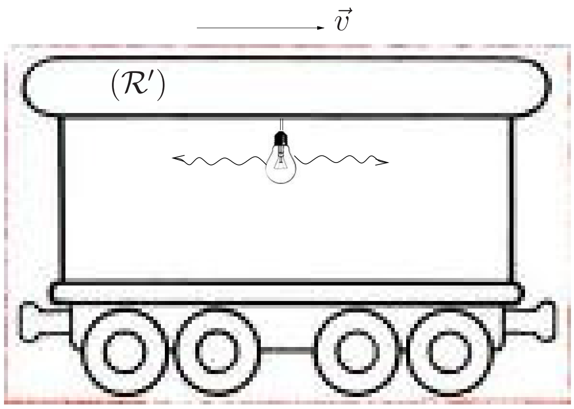


FIGURE 6 – lampe allumée au milieu d'un wagon

Pour conclure, on peut envisager la situation en mécanique classique. Par composition des vitesses, la lumière se déplaçant vers la gauche possède une vitesse moindre que celle se propageant vers la droite mais la distance à parcourir est moindre... En fait, les deux effets se compensent exactement et la lumière atteint aussi les deux parois en même temps pour l'observateur au bord de la voie : on retrouve le temps absolu de la mécanique classique.

3.3.c) Dilatation des durées

Continuons de réfléchir aux conséquences de la transformation de Lorentz. On considère deux événements ayant lieu au **même endroit** dans le référentiel $(\mathcal{R})$. On pourra pour fixer les idées s'intéresser en figure 7 à deux battements de cœur de Leia (exemple emprunté à [La]), Leia étant supposée immobile dans $(\mathcal{R})$. La durée entre ces deux événements est notée $\Delta t = \tau$. Cet intervalle de temps est dit *propre*, car les deux événements ont lieu au même endroit [12].

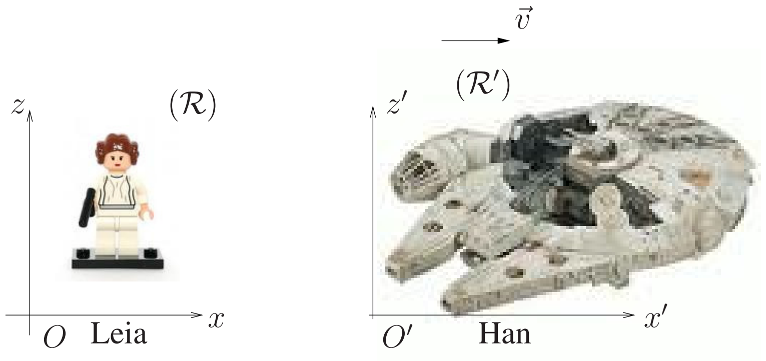


FIGURE 7 – battements de cœur de Leïa

Quelle durée $\Delta t'$ mesure Han (ou de manière équivalente des observateurs liés à Han), qui est dans son vaisseau en translation rectiligne uniforme à $\vec{v}$ par rapport à Leia, entre les battements de cœur de cette dernière ? La transformation de Lorentz (3) donne la réponse :

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = \gamma \Delta t = \gamma \tau \geq \tau$$

On retiendra l'expression de la dilatation des durées :

$$\Delta t' = \gamma\tau, \text{ avec } \tau \text{ durée propre} \tag{6}$$

La durée mesurée dans un référentiel galiléen dans lequel les événements n'ont pas lieu au même endroit (durée impropre) est donc toujours supérieure à la durée propre (c'est-à-dire celle mesurée dans un référentiel galiléen où le phénomène reste au même endroit) d'un facteur γ.

Continuons la réflexion. Le cœur de Han bat en rythme avec celui de Leia : sa période propre est $\tau' = \tau$. Quelle durée perçoit Leia entre deux battements ? Celle-ci est en translation rectiligne à $-\vec{v}$ par rapport à Han et l'expression de dilatation des durées donne $\Delta t = \gamma\tau$. Ainsi, Han mesure une période $\gamma\tau$ pour les battements de cœur de Leia qui ont lieu tous les τ du point de vue de Leia. Réciproquement, Leia mesure une période $\gamma\tau$ pour les battements de cœur de Han qui ont lieu tous les τ du point de vue de Han. Cette situation peut paraître étrange, le temps semble s'écouler plus lentement pour Leia que pour Han, et réciproquement. Cela dit, une confrontation directe des horloges dont chacun d'entre eux n'aura pas oublié de se munir est impossible : Leia et Han sont en configuration standard et s'éloignent donc irrémédiablement l'un de l'autre. Cette situation est à la base du paradoxe des jumeaux que l'on étudiera en détail par la suite (pages 11 et 16).

12. Plus précisément, un intervalle de temps entre deux événements est dit propre lorsqu'il est mesuré dans un référentiel galiléen par rapport auquel les deux événements ont lieu même endroit. En conséquence, l'intervalle est forcément de type temps (voir page 14 pour cette notion).

Exemple d'horloge

La dilatation des durées est étroitement liée à l'invariance de c comme on va le constater sur l'exemple suivant. Une horloge est constituée d'un dispositif périodique. Une possibilité est d'utiliser deux miroirs parfaitement réfléchissants et un photon faisant des aller-retours entre les miroirs (figure 8, partie gauche). La durée d'un aller-retour $\tau = 2d/c$ fournit la base de temps.

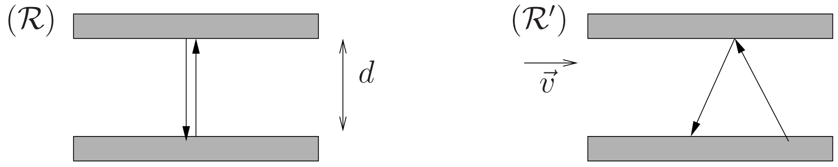


FIGURE 8 – horloge photonique dans les deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$

On considère ensuite la même situation dans un référentiel $(\mathcal{R}')$ en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel $(\mathcal{R})$ de l'horloge. Cette fois-ci, le photon parcourt une distance plus importante (sa nouvelle trajectoire est en zig-zag dans $(\mathcal{R}')$, figure 8, partie de droite). On note $\Delta t'_{1/2}$ la durée de la traversée entre les deux miroirs. Alors, la distance parcourue pendant cette durée s'estime de deux manières [13], soit à partir de la vitesse de la lumière, soit en appliquant le théorème de Pythagore :

$$d^2 + v^2(\Delta t'_{1/2})^2 = c^2(\Delta t'_{1/2})^2$$

On déduit la période de l'horloge dans $(\mathcal{R}')$:

$$\Delta t' = 2\Delta t'_{1/2} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \gamma \frac{2d}{c} = \gamma\tau$$

On retrouve bien l'expression (6) de dilatation des durées : τ est la période propre de l'horloge et $\Delta t'$ la durée associée dans un autre référentiel, avec $\Delta t' = \gamma\tau \geq \tau$.

Un jumeau voyageur

Albert, qui a 20 ans, reste en permanence fixe par rapport à un référentiel galiléen (pour simplifier, nous supposerons simplement qu'il reste sur Terre, référentiel $(\mathcal{R})$). Son jumeau Boris désire faire un voyage interstellaire. Il monte dans sa fusée qui atteint rapidement une vitesse $v = 0,99\,c$, soit $\gamma \simeq 7$, par rapport à la Terre et voyage tout droit pendant un an selon les horloges de son vaisseau. Il fait alors demi-tour (au voisinage de l'étoile Wolf) et revient voir Albert à la même vitesse (figure 9).

À son retour, Boris est donc âgé de 22 ans. Quel est l'âge d'Albert ? Pour la phase aller du voyage, la durée (propre) pour Boris est $\tau = 1$ an. Par dilatation des durées (6), la durée mesurée (ou ressentie) par Albert et ses horloges est impropre et vaut donc $\gamma\tau \simeq 7$ ans. Le retour se passe de la même manière. Au final, Albert a donc vieilli de 14 ans et est âgé

13. En fait, on anticipe légèrement sur ce qui suit : les longueurs transverses au mouvement ne subissent pas de dilatation.

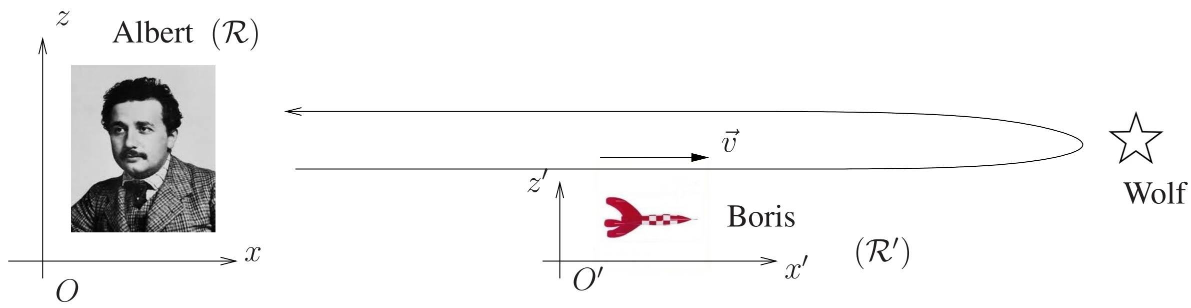


FIGURE 9 – voyage des jumeaux

de 34 ans au retour de Boris ! Il s'agit de bien comprendre que les processus biologiques de Boris ne ralentissent pas, ni que Boris a l'impression que le temps s'écoule moins vite. De son point vue, tout est absolument normal ! D'après le principe de relativité, les lois de la physique (et donc de la biologie) sont les mêmes dans tout référentiel galilén. Mais les temps correspondant aux différents référentiels ne coïncident pas.

On notera pour conclure qu'une expérience fort similaire au cas des jumeaux voyageurs a été réalisée en 1972. Deux horloges atomiques identiques (jumelles) ont été séparées : l'une est restée sur terre, et l'autre embarquée dans un avion. Au retour, l'horloge voyageuse retardait bien de la quantité désirée par rapport à la sédentaire. Là encore, la vitesse de l'avion ne perturbe pas le fonctionnement de l'horloge, mais les temps des deux référentiels ne coïncident pas. Le paradoxe des jumeaux n'est donc plus une expérience de pensée, mais un fait vérifié par l'expérience.

3.3.d) Contraction des longueurs

Vu l'invariance de la vitesse de la lumière, il existe un phénomène miroir de la dilatation des durées, comme nous allons le constater.

Luke fonce à $0,99c$ entre Aldérande et Tatooine, qui sont fixes par rapport au même référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Leia est quant à elle restée sur Aldérande. La distance entre Aldérande et Tatooine est de $d = 7$ années lumière (figure 10).

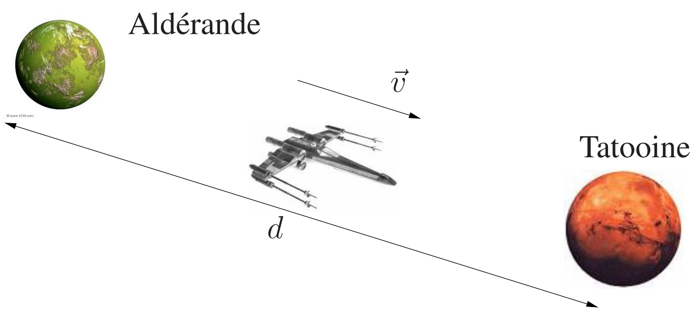


FIGURE 10 – voyage de Luke

Ainsi, pour les observateurs de $(\mathcal{R})$, dont Leïa, Luke mettra $\Delta t = d/v = 7/0,99 \simeq$

7 années pour faire le voyage. Par dilatation inverse des durées, Luke ne vieillit que $\tau = \Delta t/\gamma \simeq 1$ an pendant le voyage. La vitesse de Luke par rapport à Leïa étant l'opposée de celle de Leïa par rapport à Luke, Luke sait donc très bien que sa vitesse est de $0,99c$. Il en profite pour calculer lui-même la distance qu'il a parcourue pendant son voyage :

$$d' = v\Delta t' = v\frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{d}{\gamma} = 1 \text{ année lumière}$$

Là encore, on distingue la *distance propre* l_p correspondant à la dimension d'un objet (solide) au repos dans un référentiel [14] de la distance perçue par un observateur en mouvement par rapport à l'objet. On retiendra l'expression correspondante liant la longueur propre l_p à la longueur mesurée dans un autre référentiel

$$l = l_p/\gamma, \text{ avec } l_p \text{ longueur propre} \tag{7}$$

Cette expression peut s'obtenir directement à partir de la transformation de Lorentz (3). Imaginons qu'un observateur fixe dans $(\mathcal{R})$ veuille mesurer une règle en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}$. Alors, il doit mesurer la distance entre les deux extrémités à un même instant, $t = 0$ par exemple. On définit l'événement E_1 (E_2) comme l'endroit où se situe le côté gauche (droit) à $t = 0$.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma \Delta x$$

La longueur propre de la règle est celle dans $(\mathcal{R}')$: $\Delta x' = l_p$ et $\Delta x = l_p/\gamma$, ce qui est bien le résultat voulu. En fait, si deux observateurs différents n'obtiennent pas la même longueur de règle, c'est parce qu'ils ne mesurent pas la même chose. En effet, la mesure des positions des extrémités doit être simultanée, et le concept de simultanéité dépend du référentiel.

Il s'agit de bien comprendre que les objets voyageant ne rétrécissent pas réellement : leur longueur propre reste bien la même. Le processus de mesure, qui implique de repérer la position des extrémités **simultanément**, est différent dans des référentiels différents vu le phénomène de non-simultanéité. Ainsi, dans des référentiels différents, les observateurs ne mesurent pas la même quantité.

Longueurs transverses

Jusqu'à maintenant, on n'a considéré que des longueurs longitudinales, c'est-à-dire le long de l'axe Ox, lui-même parallèle à la vitesse relative $\vec{v}$ des deux référentiels considérés.

Qu'en est-il des longueurs transverses ? Taylor et Wheeler [TaWh] donnent l'argument amusant suivant. Soit un train dont les roues (les rails concernés) sont séparés de l_1 (l_2), avec $l_1 \neq l_2$. Si le train possède une vitesse v par rapport aux rails, et s'il existe une contraction/dilatation des longueurs transverses, alors on peut se débrouiller en choisissant la bonne vitesse pour que les roues et les rails aient le même espacement dans le référentiel des roues ou bien celui des rails. Ce choix est exclusif, donc dans l'un des référentiels, le train déraille et pas dans l'autre. Cette description est non cohérente et exclut la contraction des longueurs transverses.

14. On peut imaginer ici une règle géante liant les planètes Aldérande et Tatooine.

3.3.e) Intervalle invariant

Considérons deux événements E_1 et E_2. Alors, un observateur de $(\mathcal{R})$ mesure les différences Δx et Δt entre ces deux événements. De même, un observateur de $(\mathcal{R}')$ mesure les différences $\Delta x'$ et $\Delta t'$. Évaluons [15]

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

puis exprimons ces quantités en fonction des intervalles dans $(\mathcal{R})$ à l'aide de la transformation de Lorentz (3) :

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$$

Après quelques calculs sans difficulté, on montre

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta s^2$$

Cette quantité Δs^2 est nommée *intervalle invariant*. Elle est caractéristique de l'intervalle et ne dépend pas du référentiel dans lequel on la calcule. Suivant le signe de Δs^2, on distingue différents types de couples d'événements :

- $\Delta s^2 > 0$: *intervalle de type temps*. Les deux événements ne peuvent jamais être simultanés. En effet, dans un tel référentiel $((\mathcal{R})'')$, $\Delta t'' = 0$ et Δs^2 évalué dans ce référentiel $((\mathcal{R})'')$ donnerait $0 - \Delta x''^2 \leq 0$. Plus précisément, de tels événements se produisent toujours dans le même ordre temporel quel que soit le référentiel. On remarque que la distance entre les événements considérés est suffisamment faible pour que de la lumière parte du premier événement et atteigne la position du second événement avant que celui-ci ne se produise ;
- $\Delta s^2 < 0$: *intervalle de type espace*. Cette fois-ci, aucun rayon lumineux ne peut partir d'un des deux événements en question pour atteindre l'autre. Le couple d'intervalle est forcément non causal. Suivant le référentiel considéré, l'un ou l'autre des événements peut être antérieur à l'autre ; ils peuvent même être simultanés ;
- $\Delta s^2 = 0$: *intervalle de type lumière*. Les deux événements peuvent tout juste être reliés par un rayon lumineux partant de l'un et aboutissant à l'autre.

Un couple d'événements causaux (dont l'un est la cause de l'autre) est forcément de type temps ou lumière.

3.3.f) Synchronisation des horloges

Comme on l'a établi précédemment, mettre en mouvement une horloge par rapport à une autre implique que ces horloges ne mesureront pas les mêmes durées. Ainsi, même si le mécanisme des horloges est identique, il est nécessaire de mettre au point une procédure pour resynchroniser des horloges appartenant à un **même** référentiel.

15. Pour des transformations de Lorentz non standard, on considère plutôt $\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$.

La technique la plus simple est d'envoyer un signal lumineux à un instant t_0 de l'horloge A vers l'horloge B (figure 11). À l'horloge B, on note l'heure d'arrivée du signal et à l'aide d'un miroir, on le réfléchit vers A. En A, on note la durée Δt de l'aller-retour. Alors, forcément, quand B a reçu le signal, l'instant était donné par $t_0 + \frac{\Delta t}{2}$ du point de vue de A. Il n'y a plus qu'à décaler l'heure indiquée par l'horloge B pour que les horloges A et B soient synchronisées.

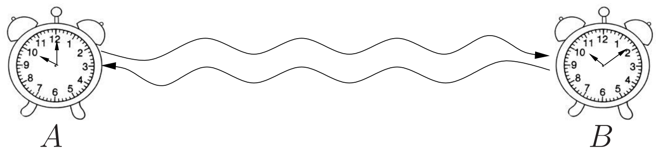


FIGURE 11 – synchronisation des horloges

3.3.g) Composition des vitesses

On reprend la technique ayant mené à l'établissement de (2). La vitesse selon x mesurée dans le référentiel $(\mathcal{R})$ est $V = \dfrac{dx}{dt}$, et on la réexprime à l'aide de la transformation de Lorentz (4) sous forme infinitésimale :

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + v\,dt')}{\gamma\left(dt' + \dfrac{v\,dx'}{c^2}\right)}$$

soit en notant $V' = \frac{dx'}{dt'}$ la vitesse dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ et en divisant par dt',

$$\boxed{V = \frac{V' + v}{1 + \dfrac{V'v}{c^2}}} \tag{8}$$

Notamment, si les vitesses sont faibles par rapport à celle de la lumière ($V', v \ll c$), on retrouve la composition classique (2) des vitesses. Inversement, si on s'intéresse à la propagation d'un rayon de lumière dans $(\mathcal{R}')$, $V' = c$ et alors $V = c$. La lumière a bien la même vitesse dans tous les référentiels galiléens.

Pour conclure, imaginons que Han possède la vitesse $c/2$ par rapport à Leia, et Luke la vitesse $c/2$ par rapport à Han (figure 12). Quelle est la vitesse de Luke mesurée par Leia ? L'expression (8) donne

$$V = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c$$

contrairement à l'expression classique qui prévoit c.

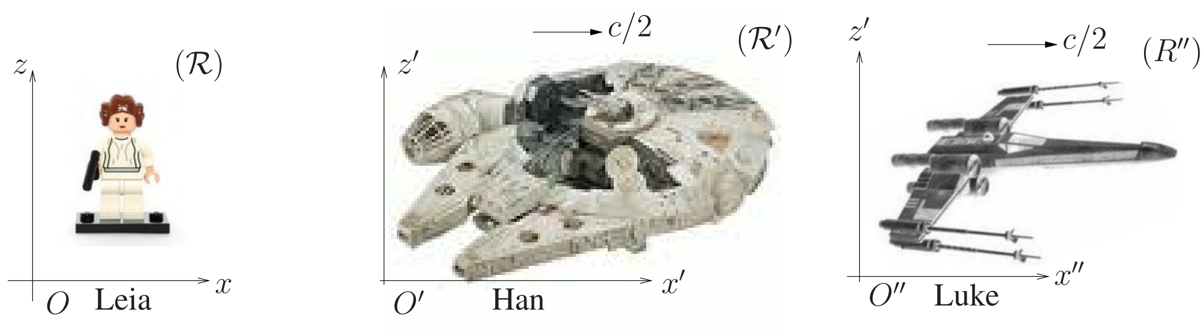


FIGURE 12 – Leïa, Han et Luke

4 Quelques paradoxes et applications célèbres

Un paradoxe est une situation qui, incorrectement formulée, semble contradictoire avec une ou des lois physiques. Évidemment, résoudre le paradoxe consiste à montrer qu'il n'en est rien.

4.1 Paradoxe des jumeaux

Énoncé

Même s'il heurte le sens commun, l'exemple des jumeaux voyageurs étudié en page 11 ne pose *a priori* pas de problème, d'autant plus qu'une expérience similaire a été réalisée avec succès. Néanmoins, le raisonnement utilisé est un peu biaisé. On pourrait se placer du point de vue d'Albert. L'intervalle de temps propre pour Albert entre le départ et le retour de Boris est noté τ_A. Par dilatation des durées (6), Boris ressent la durée $\gamma\tau_A$ entre son départ et son retour. Par conséquent, au retour, Albert doit être plus jeune que Boris. On aboutit à la situation inverse de la première analyse.

Discussion

L'argumentation précédente s'inscrit directement dans le cadre de la relativité. Si Albert est en mouvement par rapport à Boris, alors Boris est en mouvement par rapport à Albert. Cela dit, les situations des deux jumeaux ne sont pas symétriques. Albert reste lié à un référentiel galiléen, alors que Boris part dans une fusée qui va faire un aller-retour, donc subit des accélérations. Il est ainsi très facile de distinguer expérimentalement les jumeaux : l'un subit des accélérations et pas l'autre. Le problème est donc intimement lié aux accélérations de Boris, et en particulier à son demi-tour [16]. Ainsi, le raisonnement rendant Albert plus jeune au retour de Boris fait intervenir une dilatation des durées entre le référentiel terrestre (dans lequel les événements initial et final ont lieu au même endroit) et "le" référentiel de

16. L'accélération initiale n'est pas importante. On peut imaginer qu'une autre personne non jumelle se débrouille pour atteindre une vitesse $v = 0,99c$ par rapport à la Terre et avoir tout juste 20 ans au moment où elle passe à proximité d'Albert. Les deux personnes constatent alors qu'elles ont le même âge. De même, le retour à pleine vitesse de Boris n'est pas non plus un problème.

la fusée. Or ce dernier n'est pas unique suite au demi-tour. En revanche, le raisonnement prédisant un âge plus avancé pour Albert au retour de Boris fait intervenir deux dilatations des durées entre le référentiel aller (retour) de la fusée et le référentiel terrestre. À chaque fois intervient le facteur γ de dilatation par rapport aux durées propres ressenties par Boris. En conclusion, Albert est bien plus vieux au retour de Boris.

Détaillons la situation. On supposera qu'au départ, les horloges sont mises à zéro. Pendant toute la phase aller, Boris possède une vitesse uniforme $v = 0,99\,c$ par rapport à Albert. Juste avant le demi-tour, Boris lit sur les horloges de son vaisseau une durée de 1 an et il a donc 21 ans. Quelle est la date pouvant alors être lue au télescope par Boris sur les horloges d'une hypothétique planète à proximité de l'étoile Wolf (figure 9) [17] ? Par dilatation des durées par rapport à la durée propre de Boris, il faut multiplier par γ et on obtient 7 ans. Ainsi, au même instant, Albert a 27 ans. Inversement, intéressons-nous à Albert et plus précisément 1 an$/\gamma \simeq 1,7$ mois après le départ de Boris. À ce moment, Boris lit sur ses horloges de bord une durée dilatée de γ, soit 1 an$/\gamma \times \gamma = 1$ an ! Autrement dit, il est en train d'arriver à proximité de l'étoile Wolf et va débuter son demi-tour.
Que doit-on en penser ? Albert a-t-il 27 ans ou 20 ans et presque 2 mois quand Boris va aborder son demi-tour ? En fait, cette question est mal posée car on a montré précédemment que la simultanéité était relative (paragraphe 3.3.b)). Albert a en fait 27 ans au même instant par rapport au référentiel terrestre et 20 ans plus 1,7 mois au même instant par rapport au référentiel de la fusée. Cette situation n'engendre en fait aucun paradoxe tant que la fusée continue d'avancer à vitesse constante. Albert et Boris ne peuvent pas se rencontrer, confronter directement leurs âges relatifs. L'âge d'Albert à un instant donné de la vie de Boris n'est pas unique, il dépend de l'observateur.

Pour fixer les idées, imaginons que Boris s'arrête quelques instants pour prendre une bière à mi-voyage sur la planète Wolf 1 en orbite autour de Wolf. On supposera que l'accélération est très violente [18] et ne dure que quelques instants pour Boris. Ainsi, juste avant de débarquer sur la planète, Boris regarde son calendrier personnel et constate qu'il est parti depuis un an (intervalle propre entre les événements "Boris quitte Albert" et "Boris débarque sur Wolf 1"). Du coup, l'intervalle de temps impropre entre ces mêmes événements dans le référentiel lié à la Terre et à la planète Wolf 1 est de 7 ans : en achetant le journal sur Wolf 1, Boris constate que 7 années se sont bien écoulées depuis son départ. Il a alors une pensée pour son frère âgé de 27 ans, alors que lui n'en a que 21. Par symétrie, le voyage retour a exactement les mêmes caractéristiques que le voyage aller.

Finalement, Albert a bien 34 ans au retour de Boris [19]… Ce paradoxe est très discuté

17. Les horloges de cette planète d'arrivée et celles de la Terre où se trouve Albert sont supposées situées dans un même référentiel $(\mathcal{R})$ et peuvent donc être synchronisées.

18. Il ne faut pas penser que l'accélération joue un rôle dans la dilatation des durées. La relativité restreinte est tout à fait valide pour calculer des durées dans des référentiels de vitesse variable par rapport à un référentiel galiléen donné, il suffit de calculer de manière infinitésimale les durées dans le référentiel tangent au référentiel mobile.

19. On a là un exemple du principe de vieillissement maximal de Wheeler. Entre deux événements donnés (avec intervalle de genre temps), lorsqu'on considère des horloges passant de manière quelconque du premier au second événement, l'horloge indiquant à la fin la durée maximale est celle ayant un mouvement rectiligne uniforme entre les deux événements.

dans la littérature, notamment dans [TaWh, Sm].

4.2 Muons dans l'atmosphère

En haute atmosphère (vers 30 km d'altitude), des rayons cosmiques (particules, comme par exemple des protons, d'origine encore mal connue et d'énergie très élevée) heurtent des molécules et la collision crée des gerbes de particules comme des pions, qui eux-mêmes se décomposent notamment en muons [20] relativistes, c'est-à-dire de vitesse très proche de c (typiquement de l'ordre de $0,99\,c$).

Comme la demi-vie [21] des muons est de l'ordre de $\tau \simeq 1,5\ \mu$s, la moitié des muons devrait avoir disparu après avoir parcouru une distance $d \simeq 0,99\,c\tau \approx 500$ m. Au niveau de la mer, il devrait en rester une proportion $\left(\frac{1}{2}\right)^{30/0,5} \approx 10^{-18}$, c'est-à-dire à peu près aucun. Néanmoins, un nombre appréciable de ces muons est détecté au niveau de la mer...

Discussion

Il s'agit d'un phénomène de dilatation des durées. Le muon possède une durée de vie moyenne (propre) alors que la visualisation de leur trajectoire donne accès a une durée impropre, augmentée d'un facteur γ, Ainsi, les muons peuvent parcourir une distance γ fois plus importante et être détectés. Pour $v = 0,99\,c$, $\gamma \simeq 7$, soit une distance de demi-vie $\gamma d \simeq 3,5$ km. La proportion restant au niveau de la mer serait alors $\left(\frac{1}{2}\right)^{30/3,5} \approx 3.10^{-3}$, ce qui rend leur détection possible [22].

4.3 Paradoxe de la grange et du bâton (ou du train et du tunnel)

Énoncé

Soit un bâton de longueur propre (donc mesurée dans son référentiel propre) l et une grange de même longueur propre l. Une personne court à une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ en portant le bâton. On note $(\mathcal{R})$ le référentiel lié à la grange et $(\mathcal{R}')$ celui lié au bâton. Dans le référentiel $(\mathcal{R})$ de la grange, suite à la contraction des longueurs, le bâton a une longueur $l' = l/\gamma < l$. Dans $(\mathcal{R})$, le bâton est donc plus court que la grange (figure 13). Ainsi, si on place à l'entrée et à la sortie deux personnes chargées d'ouvrir et de fermer les portes, on peut se débrouiller pour qu'à un instant donné, le bâton soit contenu dans la grange avec les deux portes fermées. Inversement, dans le référentiel du bâton $(\mathcal{R}')$, la grange subit une contraction des longueurs et cette fois, c'est la grange (en mouvement à $-\vec{v}$) qui est plus courte que le bâton. Du coup, il est impossible que le bâton soit entièrement contenu dans la ferme... Qui croire ?

20. Le muon est un lepton, comme l'électron. Il possède la même charge que celui-ci, mais est plus lourd. En conséquence, il est instable, et se désintègre spontanément selon la réaction $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, les deux dernières particules étant un anti-neutrino et un neutrino.

21. C'est la durée au bout duquel la moitié des muons s'est désintégrée.

22. Évidemment, une analyse plus détaillée doit prendre en compte la répartition en énergie des muons créés par les les rayons cosmiques, mais l'idée générale est celle-ci.

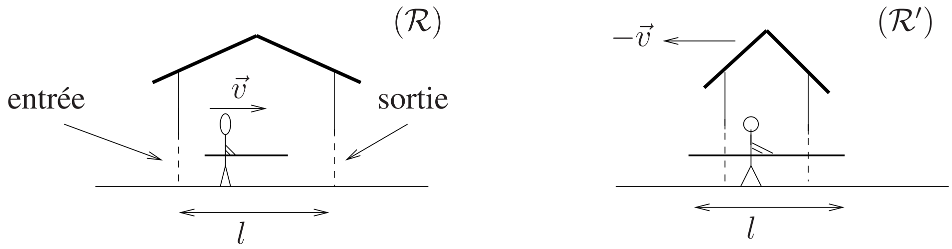


FIGURE 13 – paradoxe de la grange et du bâton : représentation dans le référentiel $(\mathcal{R})$ de la grange à gauche et dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ du bâton à droite

Discussion

Il s'agit d'un cas classique d'inversion d'ordre temporel. Fixons les notations. On suppose que la porte d'entrée (c'est-à-dire de gauche) de la ferme est initialement ouverte, la porte de sortie étant fermée. L'événement E_1 est déterminé par l'instant où le bâton a fini de passer la porte d'entrée, le lieu étant cette même porte d'entrée (figure 14, partie gauche). Juste après E_1, une personne ferme la porte d'entrée. L'événement E_2 a lieu quand le bâton atteint la porte de sortie, au niveau de cette porte. Une personne ouvre la porte de sortie juste après E_2, et le bâton ressort.
Dans le référentiel $(\mathcal{R})$ de la grange, E_2 est postérieur à E_1, et le bâton est entièrement contenu dans la grange dans l'intervalle. On peut même déterminer

$$\Delta x = x_2 - x_1 = l \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{v}\left(l - \frac{l}{\gamma}\right)$$

Examinons alors la situation dans le référentiel $(\mathcal{R}')$, c'est-à-dire du point de vue du bâton pour lequel la grange se déplace vers la gauche (figure 14, partie de droite). Cette fois-ci, la grange est moins longue que le bâton. Ainsi, l'extrémité droite du bâton et la porte de sortie de la grange sont en contact (événement E_2) **avant** que l'extrémité gauche du bâton et la porte d'entrée ne coïncident (événement E_1). C'est clair sur le schéma de la figure 14, on peut le vérifier par transformation de Lorentz (3) :

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t'_2 - t'_1 = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = l\left(\frac{1}{v}(\gamma - 1) - \gamma\frac{v}{c^2}\right) = \frac{l}{v}\left(\gamma(1 - \frac{v^2}{c^2}) - 1\right) \\ &= \frac{l}{v}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \leq 0\end{aligned} \tag{9}$$

Ainsi, par rapport au bâton, la porte de sortie est ouverte avant que celle d'entrée ne soit fermée, et le bâton n'est jamais entièrement contenu dans la grange. Ce dernier point poserait évidemment un problème !

Suite du paradoxe

On peut alors affiner le paradoxe. Cette fois, on n'ouvre plus forcément la porte de sortie, et celle d'entrée reste définitivement ouverte pour simplifier. Dans le référentiel de la grange, le bâton entre entièrement dans la grange avant de se fracasser éventuellement contre la porte

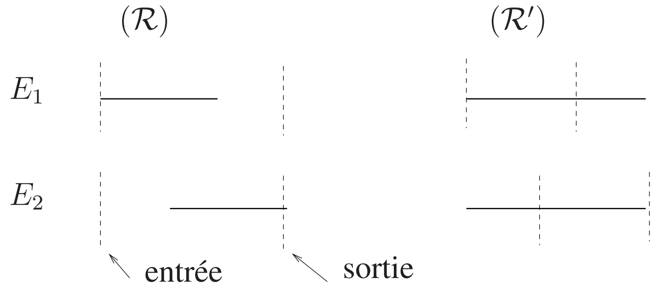


FIGURE 14 – événements E_1 et E_2 : représentation dans le référentiel $(\mathcal{R})$ de la grange à gauche et dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ du bâton à droite

de sortie. En particulier, au moment où l'extrémité gauche du bâton passe la porte d'entrée (événement E_1), tout est encore possible : si la porte de sortie est fermée, le bâton se cassera, mais si elle est ouverte, il passera sans dommage. Donc, au voisinage de l'événement E_1, le bâton est forcément intact.
La situation se gâte dans le référentiel du bâton. Tout d'abord, l'extrémité droite atteint la porte de sortie (événement E_2), et le bâton se casse si elle est fermée. Ensuite, l'extrémité gauche passe la porte d'entrée (événement E_1), mais le bâton est déjà cassé. Or, comme on l'a expliqué ci-dessus, au voisinage de l'événement E_1, le bâton ne peut pas "savoir" s'il va se casser ou non !

Discussion

Prenons le cas de la porte de sortie fermée. Lorsque le bâton heurte cette porte (événement E_2), le bâton ne se casse pas instantanément, mais une onde mécanique va progressivement remonter tout le bâton. Dans le référentiel du bâton, cette onde met au moins une durée l/c pour le remonter en entier. Or, l'extrémité gauche du bâton met $|\Delta t'| = \dfrac{l}{v}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right)$ (expression (9)) pour atteindre la porte d'entrée depuis l'événement E_1.

Toute la question est de savoir si l'extrémité gauche du bâton a suffisamment de temps pour passer la porte d'entrée avant d'être "informée" que l'autre extrémité a heurté la porte de sortie et qu'en conséquence le bâton est en train de se briser. C'est effectivement le cas si

$$\frac{l}{v}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) \leq \frac{l}{c} \quad \text{soit} \quad 1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \leq \frac{v}{c}$$
$$\text{soit} \quad \left(1-\frac{v}{c}\right)^2 \leq 1-\frac{v^2}{c^2} \quad \text{ou encore} \quad \frac{v^2}{c^2} \leq \frac{v}{c}$$

La dernière proposition est évidemment vérifiée, et l'explication correcte.

4.4 Ficelle de Bell

Énoncé

Deux fusées identiques au repos sont initialement séparées d'une distance l_0 (Fig. 15). Une ficelle de la même longueur relie ces deux vaisseaux. On demande ensuite aux deux pilotes de mettre leurs fusées en marche à un certain instant et d'instaurer une accélération constante, identique pour les deux fusées. La ficelle va-t-elle rompre ?

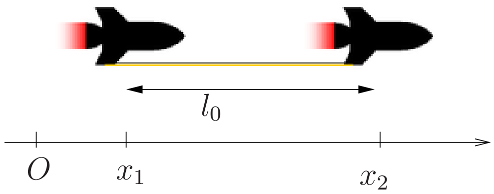


FIGURE 15 – paradoxe de la ficelle de Bell

Discussion

Dans le référentiel terrestre, dans lequel les fusées sont initialement immobiles, celles-ci ont un mouvement identique et restent donc à chaque instant distantes de l_0. En effet, si l'abscisse de la première fusée est $x_1(t)$, alors celle de la seconde vaut la même quantité à une constante près, cette constante étant l_0. Ainsi, on est tenté de penser que la ficelle ne rompt pas.

Si la longueur de la ficelle dans le référentiel terrestre est toujours l_0, la longueur propre de la ficelle est $l'_0 = \gamma l_0$ ($\gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$, où v est la vitesse de la corde) par contraction (inverse) des longueurs [23]. Comme γ croît sans être borné, la ficelle finit par rompre. Une autre manière de considérer la situation est de se placer dans le référentiel lié à la première fusée, et donc aussi à l'extrémité droite de la corde. À un instant donné, l'autre fusée possède une vitesse différente. En effet, les deux événements "la fusée numéro i possède la vitesse v_0 par rapport à la Terre" pour $i = 1, 2$ sont simultanés dans le référentiel terrestre. Ils ne le sont donc pas dans un autre référentiel car ils ont lieu à des endroits différents (relativité de la simultanéité : paragraphe 3.3.b)). La fusée deux se rapproche ou s'éloigne, donc la corde cassera ou il y aura une collision entre fusées. Ce dernier cas est à exclure car il y aurait aussi collision (et explosion) dans le référentiel terrestre ! Tous les observateurs doivent s'accorder sur ce point (comme sur le fait que la ficelle casse ou non) [24] [25].

5 Dynamique et énergétique relativistes

Nous allons étudier quelques conséquences de la relativité du point de vue de la nature des mouvements. Le but ici est de donner rapidement les lois de base sans rentrer dans

23. Ce raisonnement n'est en fait valable que pour des morceaux de corde infinitésimaux. En effet, si les différents points de la corde ont même vitesse à un instant donné dans le référentiel terrestre, ce n'est plus le cas dans un autre référentiel… voir la suite.

24. La postérité a retenu la version de Bell (1976), mais une version équivalente a été présentée par Dewan et Beran (1959).

25. Les paradoxes de relativité restent toutefois délicats à interpréter. Un sondage réalisé par Bell dans les années 1970 au sein du service de physique théorique du CERN aurait donné comme réponse majoritaire une ficelle ne rompant pas.

les détails des dérivations afin de pouvoir étudier quelques applications en physique des particules.

5.1 Dynamique

Pour une particule (ponctuelle) de masse m non nulle, la loi fondamentale de la dynamique dans un référentiel galiléen

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \tag{10}$$

reste valable, mais avec une nouvelle expression de la quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}} \tag{11}$$

À faible vitesse $v \ll c$, $\gamma \simeq 1$ et on retrouve l'expression classique $\vec{p} = m\vec{v}$.

Cas d'une force constante

Il peut s'agir d'un vaisseau se déplaçant à accélération[26] constante, ou d'une particule soumise à un champ électrique uniforme. Pour fixer les notations, on considère un vaisseau de masse constante soumis à une accélération constante $\vec{a} = a\vec{u}_x$. Alors, en projetant sur l'axe $\vec{u}_x$,

$$\frac{d(\gamma m v)}{dt} = m\,a$$

soit

$$\gamma v = at + \text{constante} = at$$

en considérant une vitesse initiale nulle. On déduit

$$v^2 = a^2t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

et on conclut par

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2t^2}{c^2}}} \leq at$$

cette dernière expression étant obtenue en mécanique classique. On constate qu'au bout d'un temps suffisamment long, le vaisseau aura une vitesse très proche de celle de la lumière (mais jamais égale).

26. L'accélération n'est plus définie par $a = dv/dt$ comme en mécanique classique. En effet, suivant le référentiel choisi, la quantité dv/dt varie (temps non absolu et composition des vitesses non linéaire). L'accélération se définit comme $a = dv'/dt'$ mesurée dans le référentiel galiléen tangent, c'est-à-dire possédant à l'instant considéré la même vitesse que le vaisseau. dv' est alors la vitesse acquise par le vaisseau dans ce référentiel pendant dt'. Cette quantité sera en fait mesurée par une personne du vaisseau en se plaçant sur un pèse-personne, à un facteur multiplicatif près (sa masse).

5.2 Énergétique

On est amené à considérer l'expression suivante de l'énergie pour une particule (ponctuelle) de masse m possédant une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $(\mathcal{R})$:

$$\boxed{E = \gamma mc^2 = E_0 + Ec \quad \text{avec} \quad E_0 = mc^2 \quad \text{et} \quad Ec = (\gamma - 1)mc^2} \tag{12}$$

La nouveauté est que même au repos, un corps de masse m possède une *énergie au repos*

$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

C'est la formule bien connue d'Einstein exprimant une équivalence entre masse et énergie. Pour un corps de masse $m = 1$ kg, on obtient l'énergie gigantesque $E_0 = 9.10^{16}$ J. Cela dit, cette énergie n'est pas facile à récupérer. Par exemple, la combustion d'un kilogramme de pétrole dégage une énergie de $E \approx 13$ kWh ≈ 50 MJ. Par conservation de l'énergie, la masse des produits de combustion moins celle du pétrole et du dioxygène initiaux vaut $\Delta m = -E/c^2 \approx -5,5.10^{-10}$ kg (variation relative de masse au cours de la réaction : $-5,5.10^{-8}$ %). Une façon de récupérer davantage de cette énergie consiste à pratiquer la fission ou la fusion nucléaire. Ainsi, la fission d'un kilogramme d'uranium naturel permet de dégager 500 GJ, soit une variation de masse $\Delta m \approx -5,6.10^{-6}$ kg (variation relative $-5,6.10^{-4}$ %). Pour de l'uranium 235 pur, un atome libère environ 200 MeV, soit une variation relative de masse de $-0,1$ %. Au final, il est donc délicat de récupérer une partie appréciable de cette énergie au repos. Des moyens (théoriques) d'en récupérer une fraction non négligeable (typiquement la moitié) à l'aide d'un trou noir sont expliqués dans [TaWh2] (processus de Penrose).
L'unité de masse souvent employée en relativité est l'eV/c^2, voire l'eV par léger abus de notation. Le lecteur peut vérifier par exemple que la masse d'un électron est

$$m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}.c^{-2}$$

$Ec = (\gamma - 1)mc^2$ est typiquement l'énergie cinétique. On constate que pour les faibles vitesses $v \ll c$, on retouve l'expression bien connue

$$Ec = (\gamma - 1)mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) mc^2 \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Inversement, on peut se demander pour quelle vitesse l'énergie cinétique égale l'énergie au repos, soit $\gamma = 2$ ou $v = 0,87c$. On s'aperçoit là encore des valeurs importantes de l'énergie au repos (ou de masse).

Au final, l'énergie E est la somme de ces deux termes. Le théorème de l'énergie cinétique pour un corps de masse m s'écrit alors sans surprise, en notant W_{forces} le travail des forces :

$$\Delta E = \Delta Ec = W_{\text{forces}}$$

Par exemple, une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire uniforme ne gagne aucune énergie, sa vitesse reste constante. Sa trajectoire est une hélice (un cercle si la vitesse initiale est contenue dans un plan perpendiculaire au champ magnétique).

On remarquera que si on n'arrête pas de communiquer de l'énergie à une particule (par exemple à l'aide d'un champ électrique si la particule est chargée), sa vitesse finit pas être très proche de c et ne varie quasiment plus. En revanche, son énergie croît sans fin car γ tend alors vers l'infini.

On retiendra pour finir que les expressions précédentes de l'énergie E et de la quantité de mouvement $\vec{p}$ impliquent une relation liant l'énergie et la quantité de mouvement :

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \tag{13}$$

L'analogue de cette relation en mécanique classique est $Ec = \vec{p}^2/2m$.

5.3 Photons

Rappelons que le photon est la particule associée à l'onde électromagnétique. Il se propage (dans le vide) à la vitesse c et possède une masse nulle. Les expressions précédentes posent problème car il faut prendre une limite de masse nulle, avec une vitesse tendant vers celle de la lumière, soit un facteur γ tendant vers l'infini. La relation (13) ne présente aucune singularité et devient

$$E = pc \tag{14}$$

Lors de l'interprétation de l'effet photoélectrique (1905), Einstein a postulé que l'énergie d'un photon est reliée à sa fréquence ν par

$$E = h\nu \tag{15}$$

où $h = 6,6.10^{-34}$ J.s est la constante de Planck.

Effet Doppler

De même qu'en mécanique classique, il existe un effet Doppler. Considérons un photon de fréquence $\nu = 1/T$ émis par Leia dans le référentiel $(\mathcal{R})$ et capté par Han, toujours en configuration standard (figure 16). Quelle est la fréquence $\nu' = 1/T'$ mesurée par Han ?

La mécanique classique prévoit $T' = T(1 + \frac{v}{c})$, suite à l'éloignement croissant de Han à chaque période. À cet effet Doppler classique s'ajoute un phénomène de dilatation des durées entre les deux référentiels : à la base, la période est impropre pour Han, donc il faut remplacer T par γT, soit

$$T' = T\frac{1+\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = T\sqrt{\frac{1+\dfrac{v}{c}}{1-\dfrac{v}{c}}}$$

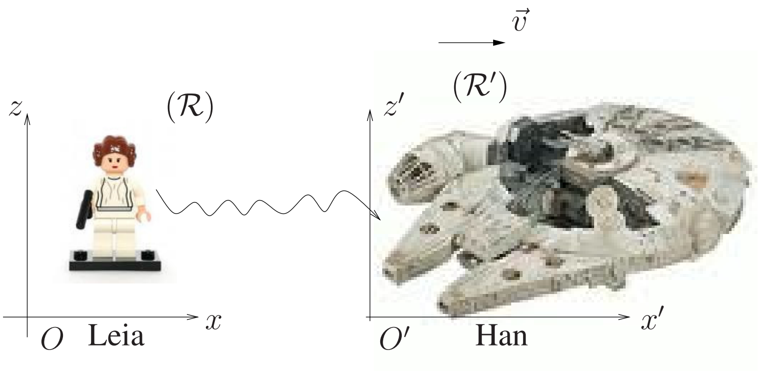


FIGURE 16 – photon émis par Leia et capté par Han

On arrive à l'*effet Doppler longitudinal*[27]

$$\boxed{\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}} \tag{16}$$

Cette formule est valable quand le photon et le récepteur ont des vitesses de même sens, sinon il faut changer v en $-v$. Il est facile de retenir que dans cette configuration, Han fuit le photon, et celui-ci l'atteint donc avec une énergie plus faible, soit une fréquence plus faible (relation (15)) : le moins est en haut. On peut remarquer qu'au final, au premier ordre en v/c, on obtient le même résultat que l'effet Doppler non relativiste.

5.4 Réactions entre particules

On citera lors des chocs entre particules la :

– conservation de la quantité de mouvement totale

– conservation de l'énergie

(lorsque les particules sont sans interaction avant et après le choc). Le nombre et la nature des particules peuvent en revanche varier (*choc inélastique*), contrairement aux chocs *élastiques*. Étudions quelques exemples.

Désintégration électron-positron[28]

Considérons la réaction

$$e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$$

27. Il existe aussi un effet Doppler transversal (c'est-à-dire que la vitesse de propagation de l'onde est perpendiculaire à celle du récepteur), purement relativiste et lié à la dilatation des durées.
28. Ce genre de désintégration est typique des réactions matière-antimatière.

où e^- est un électron, e^+ un positron (antiparticule de l'électron : même masse et charge opposée) et les γ représentent des photons. Que dire de ces photons, par exemple si l'électron et le positron sont quasiment au repos [29] dans le référentiel d'étude ?

On utilise la conservation de la quantité de mouvement. Initialement, la quantité de mouvement de l'électron et du positron sont nulles :

$$\vec{P} = \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} = \vec{0}$$

Ainsi, au final, celle des photons est nulle, c'est-à-dire que les deux photons possèdent des quantités de mouvement opposées. Vu la relation énergie/quantité de mouvement (14), on déduit que les deux photons ont même énergie, et donc même fréquence d'après (15).
La conservation de l'énergie s'écrit de la manière suivante. Initialement, l'énergie du système est la somme des énergies au repos de l'électron et du positron, soit

$$E = 2mc^2$$

Dans l'état final, c'est la somme des énergies des photons, soit $E = 2h\nu$. On conclut que la fréquence ν de chaque photon est forcément

$$h\nu = mc^2$$

soit $\nu = 1,2.10^{20}$ Hz, ou $\lambda = 2,4$ pm. Le rayonnement est donc très énergétique (rayonnement gamma).

Qu'en est-il de la réaction d'annihilation où un seul photon est créé :

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma$$

En fait, elle est impossible. En effet, la quantité de mouvement initiale est nulle comme on l'a expliqué ci-dessus, donc il en est de même pour la quantité de mouvement finale. Mais un photon a une quantité de mouvement (expressions (14) et (15)) :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Le photon aurait alors une fréquence nulle, mais cela contredirait la conservation de l'énergie. Ce résultat reste valable même si les vitesses initiales sont non nulles. Il suffit de se placer dans le référentiel barycentre de l'électron et du positron. Ainsi, leur quantité de mouvement totale est encore nulle, ce qui permet de faire le même raisonnement.

Création de paire

Réciproquement, on peut créer de nouvelles particules si l'énergie initiale est suffisante. Citons par exemple la réaction

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

FIGURE 17 – choc de deux protons de quantités de mouvement opposées

où p représente un proton et $\bar{p}$ un antiproton (même masse que le proton mais charge opposée). On supposera que les deux protons initiaux ont même énergie E_i et arrivent frontalement l'un sur l'autre avec des quantités de mouvement opposées (figure 17). Quelle est l'énergie seuil permettant cette réaction et quelle doit être la vitesse minimale des protons ?

La conservation de l'énergie fournit

$$E = 2E_i = 4mc^2 + \sum_{\text{particules finales } f} Ec_f$$

L'énergie finale est au moins constituée de l'énergie au repos des quatre particules. Dans le cas optimal, l'énergie cinétique finale est nulle, et l'énergie seuil est $E_i = 2mc^2 = 1,9$ GeV (la masse d'un proton ou d'un antiproton est $m = 938$ MeV.c^{-2}). Cela correspond à une quantité de mouvement p pour l'un des protons initiaux :

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c} = 1630 \text{ MeV.c}^{-1}$$

On en déduit la vitesse par

$$\frac{pc}{E} = \frac{\gamma mvc}{\gamma mc^2} = \frac{v}{c}$$

soit $v/c \simeq 0,87$. Les deux protons doivent avoir une vitesse de l'ordre de 90 % de celle de la lumière afin que la réaction ait lieu.

29. En pratique, il suffit que leur énergie cinétique $Ec = (\gamma - 1)mc^2$ soit négligeable devant leur énergie au repos $E_0 = mc^2$, soit $v \ll c$.

Annexe : obtention de la transformation de Lorentz

Dans cette partie sera démontrée l'expression de la transformation de Lorentz entre deux référentiels en configuration standard. On ne considérera que les coordonnées (x, t).
Le but est donc d'établir les expressions

$$x' = f(x, t) \qquad \text{et} \qquad t' = g(x, t)$$

Homogénéité de l'espace-temps

Le premier point est d'expliquer pourquoi la transformation est linéaire. Considérons deux événements proches dont l'intervalle (dx, dt) de $(\mathcal{R})$ s'exprime donc dans $(\mathcal{R}')$ par

$$dx' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dx + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dt$$

Ainsi, la présence des coefficients $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ implique que l'intervalle mesuré dans $(\mathcal{R}')$ dépend de l'instant t et de l'endroit x où les événements ont lieu. Cela est contraire à l'homogénéité de l'espace et du temps. Ces coefficients sont donc des constantes, et la transformation est linéaire.
Il reste à déterminer les six coefficients a_{ij} et b_i tels que

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}t + b_1 \\ t' = a_{21}x + a_{22}t + b_2 \end{cases}$$

Les b_i correspondent simplement à un changement d'origine de l'espace et du temps. Si on choisit $t = t' = 0$ quand O et O' coïncident, alors b_1 et b_2 sont nuls, soit

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}t \\ t' = a_{21}x + a_{22}t \end{cases}$$

Ensuite, le point O' correspond à $x' = 0$ ou $x = vt$. On remplace cela dans la première expression :

$$0 = a_{11}v + a_{12}$$

et par conséquent

$$\begin{cases} x' = a_{11}(x - vt) \\ t' = a_{21}x + a_{22}t \end{cases} \tag{17}$$

Il reste trois coefficients à déterminer.

Relativité des situations et isotropie de l'espace

Posons $X = -x$ et $X' = -x'$. Alors, (X', t') et (X, t) sont en configuration standard, c'est-à-dire que (X, t) est en translation à la vitesse $v\vec{u}_{X'}$ par rapport à (X', t') (figure 18) (on utilise ici l'isotropie de l'espace).

Ainsi,

$$\begin{cases} X = a_{11}(X' - vt') \\ t = a_{21}X' + a_{22}t' \end{cases}$$

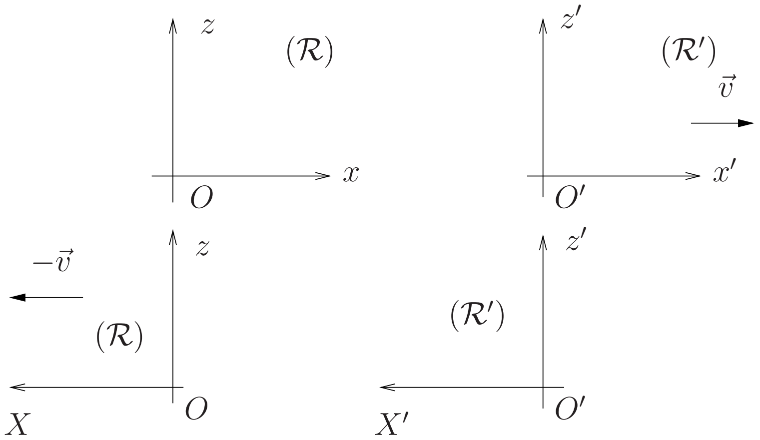


FIGURE 18 – échange des rôles des deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$

soit, en réexprimant avec les anciennes coordonnées x et x', puis en réinjectant la relation (17) :

$$\begin{cases} -x = a_{11}(-x' - vt') = a_{11}(-a_{11}(x - vt) - v(a_{21}x + a_{22}t)) \\ t = -a_{21}x' + a_{22}t' = -a_{21}(a_{11}(x - vt)) + a_{22}(a_{21}x + a_{22}t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = -xa_{11}(a_{11} + va_{21}) + a_{11}vt(a_{11} - a_{22}) \\ t = t(a_{21}a_{11}v + a_{22}^2) + a_{21}x(-a_{11} + a_{22}) \end{cases}$$

On en déduit alors les équations indépendantes :

$$a_{11} = a_{22} \qquad a_{11}(a_{11} + va_{21}) = 1 \tag{18}$$

Il reste un dernier coefficient à déterminer.

Invariance de la vitesse de la lumière

À ce point du raisonnement, on n'a utilisé que des arguments de relativité, homogénéité et isotropie. Aucune caractéristique propre à la relativité restreinte n'a été prise en compte. Ainsi, si on suppose un temps universel, alors $a_{22} = 1$ et $a_{21} = 0$, puis $a_{11} = 1$ et $a_{12} = -v$. On retrouve la transformation de Galilée (1).

Pour obtenir la transformation de Lorentz, il reste à introduire la vitesse de la lumière et à exprimer son invariance. Ainsi, si $\frac{dx}{dt} = c$, alors $\frac{dx'}{dt'} = c$. On utilise (17) sous forme infinitésimale :

$$\begin{cases} dx' = a_{11}(dx - v\,dt) \\ dt' = a_{21}dx + a_{22}dt \end{cases}$$

et par suite

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{a_{11}(\dfrac{dx}{dt} - v)}{a_{21}\dfrac{dx}{dt} + a_{22}} \qquad \text{d'où} \qquad c = \frac{a_{11}(c - v)}{a_{21}c + a_{22}}$$

On utilise les relations précédentes (18), et

$$c(a_{21}c + a_{11}) = a_{11}(c - v) \qquad \text{d'où} \qquad c^2 a_{21} a_{11} = -v a_{11}^2$$

Ainsi,

$$\frac{c^2}{v}(1 - a_{11}^2) = -v a_{11}^2 \tag{19}$$

Finalement,

$$a_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \pm\gamma$$

On choisit le signe plus car pour $v = 0$, la transformation de Lorentz est $x' = x$ et $t' = t$, soit $a_{11}(v = 0) = 1$. On en déduit par (19) les derniers coefficients :

$$a_{22} = \gamma \qquad a_{21} = -\gamma \frac{v}{c^2}$$

Bibliographie

[La] A. Laverne, *Cours de relativité*, http ://www.imnc.univ-paris7.fr/alain/,

[Sc] B. Schutz, *A first course in general relativity (2ond edition)*, Cambridge University Press (2009)

[Sm] J. H. Smith, *Introduction à la relativité*, InterEditions, Paris (1979)

[TaWh] E. F. Taylor et J.-A. Wheeler, *Spacetime Physics, introduction to special relativity (2ond edition)*, W. H. Freeman and Compagny, New York (1992)

[TaWh2] E. F. Taylor et J.-A. Wheeler, *Exploring black holes, Introduction to general relativity*, Addison Wesley Longman (2000)

La référence incontournable pour une première approche de la relativité avec formalisme minimal est à mon avis le splendide livre de Taylor et Wheeler[TaWh], qui contient en plus des exercices corrigés. Le livre de Smith[Sm] (en français) est déjà un peu plus technique et constitue une suite très intéressante. Les cours en ligne d'Alain Laverne[La] ou les premiers chapitres du livre de Schutz[Sc] permettent de passer à l'écriture tensorielle, puis à la relativité générale. À ce propos, le livre de Taylor et Wheeler[TaWh2] permet une splendide première approche à nouveau quasiment sans formalisme de la relativité générale appliquée notamment aux trous noirs.