Mémoire de master 2

Mathématiques fondamentales

Propriété de décroissance rapide pour les groupes de Lie connexes

David AUGIER

Directeur de stage : Sami MUSTAPHA, Professeur à l'UPMC

Table des matières

Introduction

La notion de décroissance rapide (DR) apparaît pour la première fois dans les travaux de HAAGERUP [Haa79]. Ce terme de décroissance rapide provient du fait qu'un groupe possède la propriété DR si et seulement si toute fonction décroissant suffisamment vite s'identifie à un opérateur de convolution pour les fonctions de carré sommable sur le groupe. En fait, la propriété DR permet de contrôler la norme de cet opérateur de convolution pour les fonctions continues à support compact en fonction de la taille de leur support et de leur norme L^2.

Par la suite, JOLISSAINT [Jol90] a étudié la propriété DR, principalement dans le cas des groupes engendrés par une partie finie. Ainsi, HAAGERUP a montré la propriété DR pour les groupes libres, JOLISSAINT pour ceux à croissance polynomiale et DE LA HARPE pour les groupes hyperboliques. D'autres travaux ont continué cette étude pour d'autres types de groupes. Notamment, CHATTERJI, PITTET et SALOFF-COSTE ont caractérisé exactement les groupes de Lie connexes possédant la propriété DR [CPS07].

Il est assez aisé d'établir que les groupes de Lie à croissance polynomiale ont la propriété DR. Il reste donc à s'intéresser aux groupes de Lie à croissance exponentielle.

Le travail de CHATTERJI, PITTET et SALOFF-COSTE utilise principalement les résultats de travaux précédents :

- GUIVARC'H, JENKINS ont étudié la croissance des groupes, notamment celle des groupes de Lie connexes [Gui73][Jen73]. Ils ont montré que les groupes de Lie connexes de croissance polynomiale étaient exactement ceux de type R ;
- l'estimation de la croissance de la norme L^2 de la fonction sphérique élémentaire de HARISH-CHANDRA sur les boules bornées centrées [CGH94] permet d'établir que les groupes de Lie réels connexes semi-simples à centre fini possèdent la propriété DR ;
- VAROPOULOS a classifié les algèbres de Lie de manière algébrique entre les types B et NB [Var96]. Il a lié cette classification à certains résultats analytiques pouvant être rapprochés de la propriété DR [Var96].

Dans la suite seront détaillés les principaux résultats de ces travaux, menant à la caractérisation des groupes de Lie possédant la propriété DR. Le chapitre I définit les notions mises en jeu pour étudier la propriété DR, notamment la convolution pour les fonctions définies sur un groupe localement compact, les fonctions longueurs et les groupes moyennables. Il établit un premier lien entre propriété DR et moyennabilité. Le chapitre II traite de la croissance des groupes localement compacts engendrés par un compact et de la relation entre la moyennabilité et la croissance. Dans le cas des groupes de Lie connexes, on établit l'alternative croissance polynomiale (type R)/croissance exponentielle. Le chapitre III, grâce aux propriétés des groupes moyennables et à une estimation de la fonction sphérique élémentaire, établit la propriété DR pour les groupes de Lie connexes semi-simples à centre fini. Enfin, le chapitre IV s'intéresse à la classification B/NB des algèbres de Lie, et établit la caractérisation des groupes de Lie connexes possédant la propriété DR.

Chapitre I

Notions préliminaires

1 Quelques notations

Tous les groupes considérés sont topologiques, à topologie séparée, séparable et localement compacte. Notamment, un groupe discret est alors dénombrable. La loi de groupe sera notée multiplicativement (d'élément neutre e), sauf dans le cas des groupes commutatifs pour lesquels on prendra une notation additive (d'élément neutre 0). Les algèbres de Lie considérées seront forcément de dimension finie.

La mesure de HAAR fournit une mesure ν invariante à gauche ou à droite sur les groupes considérés, les parties mesurables étant les boréliens. Notamment, la mesure de HAAR d'un ouvert est non nulle. On rappelle qu'une mesure de HAAR est régulière, c'est-à-dire :

1. $\nu(B) = \inf\{\nu(U) : U \text{ ouvert}, \ B \subset U\}$ pour tout borélien B de G ;
2. $\nu(B) = \sup\{\nu(K) : K \text{ compact}, \ K \subset B\}$ pour tout borélien B de G ;
3. $\nu(K) < \infty$ pour tout K compact de G.

Cette mesure est unique, à une constante multiplicative près. Si aucune précision n'est apportée, on choisit les mesures de HAAR invariantes à gauche. On considèrera implicitement la mesure de poids total unité sur les groupes compacts et la mesure de comptage sur les groupes discrets.

La mesure de HAAR est à la base de l'analyse sur les groupes. Nous allons en rappeler quelques aspects. Considérons un groupe G localement compact, muni d'une mesure de HAAR (invariante à gauche). Tout d'abord, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(G)$ des fonctions continues à support compact du groupe G dans $\mathbb{C}$.

Le *module* de G, noté $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$, est le morphisme de groupes continu défini par

$$\int_G f(xy)\,dx = \Delta(y^{-1}) \int_G f(x)\,dx$$

pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$ et $y \in G$. Si $\Delta \equiv 1$, G est dit *unimodulaire*. On rappelle que, notamment, les groupes discrets, commutatifs, ou compacts sont unimodulaires ainsi que les groupes de Lie semi-simples.

On définit ensuite l'espace vectoriel de BANACH $L^1(G)$ des fonctions intégrables, c'est-à-dire des fonctions mesurables f de G dans $\mathbb{C}$ telles que

$$||f||_1 = \int_G |f(x)|\, dx < \infty$$

Les fonctions (mesurables) complexes sur G de carré sommable forment l'espace de HILBERT $L^2(G)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

et de la norme associée notée $||.||_2$.

On nomme support (essentiel) d'une fonction le plus petit fermé tel que f soit nulle en dehors de ce fermé (mis à part éventuellement en un ensemble de mesure nulle).

On rappelle la densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(G)$ et $L^2(G)$ pour les normes naturellement associées.

2 Fonctions longueur

Définition 1 *Étant donné un groupe topologique localement compact G, une* longueur *sur G est une application mesurable $\ell : G \to \mathbb{R}^+$ telle que :*
- $\ell(e) = 0$ *(e est l'élément neutre),*
- $\ell(xy) \leq \ell(x) + \ell(y)$ *pour tous $x, y \in G$,*
- $\ell(x^{-1}) = \ell(x)$ *pour tout $x \in G$*

La longueur est dite localement bornée *si elle est bornée sur tout compact de G.*

Exemple 2 On peut citer les cas suivants :

1. la fonction nulle est une longueur sur n'importe quel groupe ;
2. sur $\mathbb{Z}$, une longueur possible est $\ell_1(n) = |n|$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Mais, on dispose d'autres choix, comme $\ell_2(n) = \ln(1 + \ell_1(n))$, puis $\ell_3(n) = \ln(1 + \ell_2(n))\dots$;
3. si le groupe G est engendré par un compact symétrique ($K = K^{-1}$), c'est-à-dire $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} K^n$, on définit une longueur localement bornée associée à K et notée ℓ_K par

$$\ell_K(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} : x \in K^n\},$$

avec par convention $K^0 = \{e\}$. Par analogie avec les groupes discrets, une telle longueur s'appelle *longueur de mots*. Notamment, il est toujours possible d'utiliser une longueur de mots sur un groupe de Lie connexe. Par la suite, on utilisera implicitement une longueur de mots sur sur les groupes engendrés par un compact.

Théorème 3 *Soit G un sous-groupe localement compact engendré par le compact symétrique K. Alors la longueur ℓ_K est localement bornée.*

Démonstration. Soit L un compact de G. Il existe un entier $p \geq 1$ tel que K^p soit d'intérieur non vide (car de mesure non nulle), et K^{p+1} est voisinage de l'élément neutre. L est recouvert par les ouverts $x(K^{p+1})^\circ$, où $x \in L$. Comme L est compact, un sous-recouvrement fini suffit. On note $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de L correspondant, et soit $C = \sup_{i \leq n} \ell_K(x_i)$. Alors ℓ_K est bornée par $C + p + 1$ sur L. □

La longueur de mots est très particulière car étant donné une autre longueur localement bornée ℓ, pour $x = k_1 \ldots k_n$, avec n minimal,

$$\ell(x) \leq \ell(k_1) + \ldots + \ell(k_n) \leq M_K \ell_K(x),$$

où M_K est une constante définie par $M_K = \sup_K(\ell)$;

4. longueurs et distances sont des notions assez proches.

   Si G agit isométriquement sur un espace métrique (X, d), alors le choix d'un point x_0 de X permet de définir une longueur ℓ par $\ell(g) = d(g.x_0, x_0)$. Notamment, si G est un groupe de Lie connexe, une métrique riemanienne invariante à gauche définit une longueur par la distance géodésique entre l'élément neutre e et un élément x quelconque de G ;

   De manière opposée, à partir d'une longueur ℓ, on peut définir une pseudo-distance d sur le groupe G, invariante par translation à gauche par $d(x, y) = \ell(x^{-1}y)$ pour $x, y \in G$.

   En fait, obtenir une longueur à partir d'une distance sur un espace métrique sur lequel G agit isométriquement représente le cas général. Étant donnée une longueur ℓ sur le groupe G, on définit le sous-groupe H de G par l'ensemble des points de G annulant ℓ :

   $$H = \{x \in G : \ell(x) = 0\}$$

   Alors $X = G/H$ est un espace métrique quand on le munit de la distance $d(xH, yH) = \ell(x^{-1}y)$ (cette définition a bien un sens une fois que l'on a facilement montré que $\ell(xh) = \ell(x)$ si $x \in G$ et $h \in H$). G agit alors isométriquement et librement par translations à gauche, et $\ell(x) = d(xH, H)$ pour tout $x \in G$;

5. soit H un sous-groupe de G, et ℓ une longueur sur G. Alors la restriction de ℓ à H induit une longueur sur H, appelée longueur induite.

Pour une longueur ℓ, et $r \geq 0$, on note $B_\ell(r)$ la boule centrée sur l'élément neutre et de longueur-rayon r, c'est-à-dire

$$B_\ell(r) = \{x \in G : \ell(x) \leq r\}$$

Dans la suite, on ne considérera que des longueurs localement bornées.

3 Structures liées à la convolution

3.1 Algèbre de groupe

À partir de la loi de groupe, il est possible de munir l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c(G)$ d'une structure d'algèbre.

Pour débuter, on suppose le groupe G discret (dénombrable). On définit pour $x \in G$ la fonction de Dirac δ_x sur G par

$$\delta_x(x) = 1 \qquad \delta_x(y) = 0 \quad \text{si} \quad y \neq x$$

Les fonctions de Dirac forment une base de $\mathcal{C}_c(G)$ (fonctions à valeurs complexes et à support compact, donc fini ici). Si $x, y \in G$, on définit alors le produit de convolution de deux fonctions de Dirac par

$$\delta_x \star \delta_y = \delta_{xy},$$

puis on l'étend à $\mathcal{C}_c(G)$ par linéarité. Le produit de convolution se réécrit pour $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$ et $x \in G$:

$$f \star g(x) = \sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x)$$

Les deux expressions coïncident sur les fonctions de Dirac, donc sur $\mathcal{C}_c(G)$ par linéarité. On vérifie que $f \star g$ est bien à support compact, et $\mathcal{C}_c(G)$, muni de la convolution, a une structure d'algèbre, appelée algèbre de groupe.

Plus généralement, on considère un groupe topologique G (localement compact). Soient $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$. On définit le produit de convolution à gauche $f \star g$ par

$$(\lambda(f))(g)(x) = f \star g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, dy = \int_G f(xy) g(y^{-1})\, dy$$

pour $x \in G$. Le théorème de convergence dominée montre la continuité de $f \star g$, et le support de $f \star g$ est bien compact (plus précisément, $\text{Supp}(f \star g) \subset \text{Supp}(f).\text{Supp}(g)$). $\mathcal{C}_c(G)$ muni de la convolution est donc bien une algèbre pour G localement compact.

On peut de même définir un produit de convolution à droite :

$$(\rho(f))(g)(x) = \int_G \frac{f(y) g(xy^{-1})}{\Delta(y)} dy$$

3.2 Cas de $L^1(G)$

Si $f, g \in L^1(G)$, $f \star g$ reste bien définie et est même élément de $L^1(G)$. En effet, $f \star g$ est mesurable, et par théorème de FUBINI,

$$||f \star g||_1 \leq \int_G |f \star g(x)|\, dx \leq \int_G dx \int_G dy |f(y)|\, |g(y^{-1}x)| \leq ||f||_1\, ||g||_1$$

En conséquence, $L^1(G)$, muni du produit de convolution, est une algèbre de BANACH. Cette algèbre est de plus involutive, si on définit

$$f^*(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\bar{f}(x^{-1}) \tag{1.1}$$

pour $f \in L^1(G)$ et $x \in G$. On note que cette application définit une isométrie de $L^1(G)$.

3.3 Cas de $L^2(G)$

La situation pour $L^2(G)$ est radicalement différente car $L^2(G)$ muni du produit de convolution n'est pas une algèbre en général (dès que G est infini).

En revanche, l'algèbre de groupe $\mathcal{C}_c(G)$ s'injecte dans l'espace de Hilbert $B(L^2(G))$ des applications linéaires bornées de $L^2(G)$, muni de la norme d'opérateur $||.||_{2\to 2}$ telle que pour $u \in B(L^2(G))$,

$$||u||_{2\to 2} = \sup\{||u(f)||_2 : f \in L^2(G), ||f||_2 = 1\}$$

Plus précisément, on définit $\lambda : \mathcal{C}_c(G) \to B(L^2(G))$ par la convolée à gauche

$$(\lambda(f))(g) = f \star g$$

pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$ et $g \in L^2(G)$. On obtient alors en utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$||f \star g||_2 \leq ||f||_1 ||g||_2$$

d'où

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq ||f||_1 \tag{1.2}$$

Une tentative de majoration de $||\lambda(f)||_{2\to 2}$ par $||f||_2$ (toujours pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$) sera à la base de la propriété de décroissance rapide.

On considère alors la fermeture pour la norme d'opérateur de $\lambda(\mathcal{C}_c(G))$ dans $B(L^2(G))$. Les éléments de cette fermeture vérifient l'équation C^* : on obtient une C^*-algèbre, appelée C^*-algèbre réduite du groupe localement compact G et notée $C_r^*(G)$.

On peut lier les convolutions à droite et à gauche de la manière suivante. L'application $\imath : L^2(G) \to L^2(G)$ définie par

$$\imath(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(x)}} f(x^{-1})$$

pour $f \in L^2(G)$ et $x \in G$ est une involution isométrique. On vérifie alors que

$$\rho(f) = \imath \circ \lambda(\imath(f)) \circ \imath \tag{1.3}$$

3.4 Espaces de Sobolev

Soit ℓ une longueur sur le groupe localement compact G. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace de Sobolev $H_\ell^k(G)$ par

$$H_\ell^k(G) = \{f \in L^2(G) : ||f||_{\ell,k} = \sqrt{\int_G (1+\ell(x))^{2k} |f(x)|^2 \, dx} < \infty\}$$

$H_\ell^k(G)$ est un espace de Hilbert, la norme $||.||_{\ell,k}$ n'étant qu'une norme $||.||_2$ pondérée par $(1+\ell)^{2k}$.

On obtient ensuite l'espace de FRÉCHET (pour la topologie limite projective des espaces de SOBOLEV) des fonctions à décroissance rapide

$$H_\ell^\infty(G) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} H_\ell^k(G)$$

Ces fonctions décroissent plus vite que l'inverse de tout polynôme en ℓ.

Exemple 4 Si $G = \mathbb{Z}$, avec $\ell(n) = |n|$, alors $H_\ell^k(\mathbb{Z})$ ($H_\ell^\infty(\mathbb{Z})$) est isomorphe par les séries de Fourier aux fonctions de classe C^{k-1} (C^∞) sur le cercle S^1. On montre aussi qu'alors $C_r^*(\mathbb{Z})$ est associée aux fonctions continues sur S^1.

4 Propriété de décroissance rapide (DR)

Définition 5 (Propriété DR de JOLISSAINT) [Jol90] *Soit ℓ une longueur localement bornée sur un groupe localement compact G. Soit E un sous-ensemble de $L^2(G)$. On dit que le couple (G,ℓ) a la propriété DR$_E$ s'il existe un polynôme P tel que pour tout $r \geq 0$ et toute fonction $f \in E$ à support compact inclus dans $B_\ell(r)$, on a*

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq P(r)||f||_2$$

On dit que (G,ℓ) a la propriété DR si $E = L^2(G)$.

Remarque 6 Comme les groupes possédant la propriété DR sont unimodulaires (on le verra au théorème 13), on peut choisir de manière équivalente la convolution à gauche ou à droite dans la définition de la propriété DR. En effet, si G possède la propriété DR "à gauche" (en notant P le polynôme associé), considérons $f \in L^2(G)$ à support compact inclus dans $B_\ell(r)$, et $g \in L^2(G)$. Alors, par la relation (1.3),

$$||\rho(f)(g)||_2 = ||\imath \circ \lambda(\imath(f)) \circ \imath(g)||_2 = ||\lambda(\imath(f)) \circ \imath(g)||_2 \leq P(r)||f||_2||g||_2$$

car $||\imath(h)||_2 = ||h||_2$ pour $h \in L^2(G)$ et le support de $i(f)$ est aussi compact, et inclus dans $B_\ell(r)$. Ainsi, G possède la propriété DR pour la convolution à droite.

Théorème 7 *Les propriétés suivantes sont équivalentes et définissent la propriété DR pour un couple (G,ℓ) :*

1. *(G,ℓ) a la propriété DR ;*
2. *(G,ℓ) a la propriété DR$_E$ pour $E = \mathcal{C}_c(G)$;*
3. *il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$,*

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq C||f||_{\ell,k}$$

(propriété de HAAGERUP [Haa79]*) ;*

4. les fonctions à décroissance rapide sont contenues dans la C^*-algèbre réduite de G :

$$H_\ell^\infty(G) \subset C_r^*(G)$$

Démonstration. L'implication de 1. vers 2. étant immédiate, on commence par prouver celle de 2. vers 1. Supposons que (G, ℓ) possède la propriété DR_E avec $E = \mathcal{C}_c(G)$. Soient $\varepsilon > 0$, $r \geq 0$ et $f \in L^2(G)$ à support compact K inclus dans $B_L(r)$. Alors, par densité des fonctions continues à support compact dans $L^2(K)$ (pour $||.||_2$), il existe f_0 continue à support contenu dans K telle que $||f - f_0||_2 < \varepsilon$. On remarque, en utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, que

$$||f - f_0||_1 \leq ||f - f_0||_2 \ \nu(K),$$

où ν est la mesure de HAAR employée. Alors,

$$\begin{aligned} ||\lambda(f)||_{2\to 2} &\leq ||\lambda(f - f_0)||_{2\to 2} + ||\lambda(f_0)||_{2\to 2} \\ &\leq ||f - f_0||_1 + P(r)||f_0||_2 \\ &\leq \nu(K)\varepsilon + P(r)(\varepsilon + ||f||_2) \end{aligned}$$

Ce résultat étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient bien la propriété 1.

On montre que 1. implique 3. Soit $f \in \mathcal{C}_c(G)$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ la couronne sphérique S_n par

$$S_n = \{x \in G : n \leq \ell(x) < n + 1\}$$

et on note χ_{S_n} sa fonction caractéristique. Ainsi, $f = \sum_{n=0}^\infty f\chi_{S_n}$ (en fait cette somme est finie car ℓ est localement bornée)

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq \sum_{n=0}^\infty ||\lambda(f\chi_{S_n})||_{2\to 2} \leq \sum_{n=0}^\infty P(n+1)||f\chi_{S_n}||_2$$

En toute généralité et quitte à se restreindre à $r \geq 1$, il est possible de choisir le polynôme P sous la forme $P(r) = Cr^D$, où C et D sont des constantes, et

$$\begin{aligned} ||\lambda(f)||_{2\to 2} &\leq \sum_{n=0}^\infty C\frac{1}{n+1}(n+1)^{D+1}||f\chi_{S_n}||_2 \\ &\leq C\sqrt{\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}}\sqrt{\sum_{n=0}^\infty (n+1)^{2D+2}||f\chi_{S_n}||_2^2} \end{aligned}$$

par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. On déduit

$$\begin{aligned}
||\lambda(f)||_{2\to 2} &\leq \frac{C\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2D+2}||f\chi_{S_n}||_2^2} \\
&\leq \frac{C\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2D+2}\int_{S_n}|f(x)|^2\,dx} \\
&\leq \frac{C\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\int_{S_n}(1+\ell(x))^{2D+2}|f(x)|^2\,dx} \\
&\leq \frac{C\pi}{\sqrt{6}}||f||_{\ell,D+1}
\end{aligned}$$

Pour l'implication de 3. vers 2., on considère $r \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}_c(G)$ de support inclus dans $B_\ell(r)$. Alors,

$$||f||_{\ell,k}^2 = \int_G (1+\ell(x))^{2k}|f(x)|^2\,dx \leq (1+r)^{2k}||f||_2^2,$$

ce qui conclut.

Enfin, on montre l'équivalence entre les propriétés 3. et 4. Tout d'abord, il est clair que la propriété 3. implique la propriété 4. En effet, l'inclusion $\tilde{\lambda} : (\mathcal{C}_c(G), ||.||_{\ell,k}) \to (C_r^*(G), ||.||_{2\to 2})$ est uniformément continue, à valeur dans un espace complet. On peut donc la prolonger sur la fermeture de $C_c(G)$ pour $||.||_{L,k}$, c'est-à-dire $H_\ell^k(G)$. On déduit $H_\ell^k(G) \subset C_r^*(G)$.

Réciproquement, on va montrer que l'inclusion $\tilde{\lambda} : H_\ell^\infty(G) \to C_r^*(G)$ est continue en utilisant le théorème du graphe fermé. Alors, la proposition 3. est une conséquence de cette continuité, vu la topologie limite projective de $H_\ell^\infty(G)$. Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H_\ell^\infty(G)$ convergeant vers $f \in H_\ell^\infty(G)$ (pour sa topologie). On suppose que $(\tilde{\lambda}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $g \in C_r^*(G)$ pour $||.||_{2\to 2}$. On veut alors montrer que $g = \tilde{\lambda}(f)$. En notant $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire de $L^2(G)$, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ donne

$$\left|\langle[\tilde{\lambda}(f_n)-g](\varphi),\psi\rangle\right| \leq ||[\tilde{\lambda}(f_n)-g](\varphi)||_2||\psi||_2 \leq ||\tilde{\lambda}(f_n)-g||_{2\to 2}||\varphi||_2||\psi||_2$$

pour toutes $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(G)$. On a donc

$$\langle\tilde{\lambda}(f_n)(\varphi),\psi\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle g(\varphi),\psi\rangle$$

Comme (f_n) tend vers f dans $L^2(G)$, on obtient

$$f_n \star \varphi \star \check{\psi}(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \star \varphi \star \check{\psi}(1)$$

(1 est l'élément neutre de G et si $x \in G$, $\check{\psi}(x) = \overline{\psi(x^{-1})}$). En remarquant l'égalité

$$f \star \varphi \star \check{\psi}(1) = \langle\tilde{\lambda}(f)(\varphi),\psi\rangle\rangle,$$

on déduit que pour toutes $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(G)$,

$$\langle [\tilde{\lambda}(f_n) - g](\varphi), \psi) \rangle = 0$$

Vu la densité de $\mathcal{C}_c(G)$ dans $L^2(G)$, on déduit $\tilde{\lambda}(f) = g$ et le graphe de l'inclusion $\tilde{\lambda}$ est fermé. □

Exemple 8 On peut s'intéresser à nouveau au cas de $\mathbb{Z}$ (exemple 2.2). $\mathbb{Z}$ possède la propriété DR pour la longueur $\ell(n) = |n|$. En effet, si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{Z})$ de support inclus dans $[-n, n]$, alors, par l'inégalité (1.2) et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq ||f||_1 \leq \sqrt{2n+1}||f||_2$$

Comme on l'a vu dans l'exemple 4, $H_\ell^\infty(\mathbb{Z})$ correspond par les séries de Fourier aux fonctions infiniment dérivables sur S^1 et est bien contenu dans $C_r^*(\mathbb{Z})$ qui correspond aux fonctions continues sur S^1. On précise qu'alors $L^2(\mathbb{Z})$ est associé à $L^2(S^1)$ (théorème de PLANCHEREL).

Similairement, il est clair que $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{R}^n$ ont la propriété DR pour par exemple la longueur prise égale à $\ell(x) = ||x||_2$.

Contre-exemple 9 En revanche, $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Z}$) ne possède pas la propriété DR pour la distance nulle. En effet, la propriété DR se traduirait par l'existence d'une constante $C \geq 0$ telle que pour toutes fonctions f, g à support compact sur $\mathbb{R}$,

$$||f \star g||_2 \leq C||f||_2||g||_2$$

Cela impliquerait que $L^2(\mathbb{R})$ est une algèbre, ce qui n'est pas le cas, comme on peut le constater sur l'exemple $f = g = \dfrac{1}{x^{0,6}}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}$.

Exemple 10 Les groupes libres à nombre fini de générateurs ont la propriété DR pour la longueur des mots [Haa79].

Un certain nombre de groupes vérifie automatiquement la propriété DR. C'est l'objet des deux théorèmes suivants.

Théorème 11 *Un groupe localement compact commutatif et engendré par un compact possède la propriété DR.*

Démonstration. Un tel groupe s'identifie forcément par isomorphisme de groupes topologiques à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q \times \mathbb{Z}^r \times G_f$, où $p, q, r \in \mathbb{N}$ et G_f est un groupe fini (théorème de PONTRYAGIN). La stabilité de la propriété DR par produit direct (théorème 16) permet de conclure. □

Théorème 12 *Les groupes compacts possèdent la propriété DR.*

Démonstration. Soit G un groupe compact, et ℓ une longueur localement bornée. Alors, ℓ est même bornée. Si $f \in \mathcal{C}_c(G)$, en partant de l'inégalité (1.2) et en utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on établit

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq ||f||_1 \leq ||f||_2$$

où on a considéré la mesure de HAAR normalisée sur G. □

La réciproque du théorème précédent 12 est évidemment fausse comme on le constate avec $\mathbb{Z}$. Néanmoins, des conséquences moins fortes de la propriété DR existent. La principale est la suivante.

Théorème 13 [JiS96] *Un groupe localement compact vérifiant la propriété DR est unimodulaire.*

Démonstration. Soit (G, ℓ) vérifiant la propriété DR sans être unimodulaire. Le module de G est noté Δ et la mesure de Haar choisie ν.

Le principe est de construire une fonction $f \in H_\ell^\infty$. D'après le théorème 7, comme G possède la propriété DR, f est dans $C_r^*(G)$, donc notamment $f \star \varphi$ doit appartenir à $L^2(G)$ pour tout $\varphi \in L^2(G)$ car $||f \star \varphi||_2 \leq ||\lambda(f)||_{2\to 2}||\varphi||_2$. On va montrer que cette inégalité n'est pas vérifiée pour une certaine fonction ϕ, ce qui entraîne une contradiction.

Comme G n'est pas unimodulaire, il existe $a \in G$ tel que $\Delta(a) \geq 2$. Soient U, V deux voisinages symétriques de l'élément neutre e tels que U est relativement compact, $U \subset \{x \in G : 1/2 < \Delta(x) < 2\}$ et $V^2 \subset U$. On note c un majorant de la longueur (localement bornée) ℓ sur U.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit des voisinages symétriques de e tels que $W_k \subset V$ et de mesure $\lambda(W_k) = 2^{-k}$ (e n'est pas isolé, sinon la topologie est discrète et le groupe unimodulaire). Soient $n_k = 3k + 2$, $W = \bigcup_{k\in\mathfrak{n}^*} a^{n_k} W_k$ et $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} a^{n_k} U a^k$. Vu les valeurs que prend le module sur les divers ensembles, on déduit que les unions sont des unions de termes deux à deux disjoints. Alors,

$$\nu(W) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \nu(W_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} 2^{-k} = 1$$

On définit finalement, $\varphi = \mathbf{1}_W$ et $f = \Delta^{-1/2}\mathbf{1}_{A^{-1}}$. Alors,

$$\int_G |\varphi(x)^2| dx = \nu(W) = 1$$

Ensuite, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_G |f(x)|^2 (1 + \ell(x))^{2m}\, dx &= \int_G \Delta(x)^{-1} \mathbf{1}_{A^{-1}}(x)(1 + \ell(x))^{2m}\, dx \\ &= \int_G \mathbf{1}_A(x')(1 + \ell(x'))^{2m}\, dx' \end{aligned}$$

en posant $x' = x^{-1}$. Puis,

$$\begin{aligned}
\int_G |f(x)|^2(1+\ell(x))^{2m}\,dx &= \int_G \Delta(x)^{-1}\mathbf{1}_{A^{-1}}(x)(1+\ell(x))^{2m}\,dx \\
&= \int_G (1+\ell(x))^{2m}\mathbf{1}_A(x)\,dx \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \nu(a^{n_k}Ua^k)(1+c+(n_k+k)\ell(a))^{2m} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \nu(U)\Delta(a^{-k})(1+c+(4k+2))\ell(a))^{2m} \\
&\leq \nu(U)\sum_{k\in\mathbb{N}^*} 2^{-k}(1+c+(4k+2))\ell(a))^{2m} < \infty
\end{aligned}$$

Il reste à évaluer $||f\star\varphi||_2$. Soit $x\in G$,

$$\begin{aligned}
I(x) &= f\star\varphi(x) = \int_G f(y)\varphi(y^{-1}x)\,dy = \int_G \Delta(y)^{-1/2}\mathbf{1}_{A^{-1}}(y)\mathbf{1}_W(y^{-1}x)\,dy \\
&= \int_G \Delta(y)^{-1/2}\mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_W(yx)\,dy = \Delta(x)^{-1}\int_G \Delta(yx^{-1})^{-1/2}\mathbf{1}_A(yx^{-1})\mathbf{1}_W(y)\,dy \\
&= \Delta(x)^{-1/2}\int_G \Delta(y)^{-1/2}\mathbf{1}_A(yx^{-1})\mathbf{1}_W(y)\,dy
\end{aligned}$$

Si $y\in a^{n_k}W_k$ et $x\in a^{-k}V$, $yx^{-1}\in A$, et

$$I(x) \geq \int_G \Delta(x)^{-1/2}\Delta(y)^{-1/2}\mathbf{1}_{a^{n_k}W_k}(y)\,dy$$

On pose alors $x = a^{-k}v$ ($v\in V$) et $y = a^{n_k}w_k$ ($w_k\in W_k$), et

$$\Delta(x)^{-1/2}\Delta(y)^{-1/2} = \Delta(a^{-k}v)^{-1/2}\Delta(a^{n_k}w_k)^{-1/2} \geq \frac{1}{2}\Delta(a)^{(k-n_k)/2} \geq 2^k$$

Ainsi, pour tout $x\in a^{-k}V$,

$$I(x) \geq 2^k\int_G \mathbf{1}_{a^{n_k}W_k}(y)\,dy = 1$$

Au final,

$$||f\star\varphi||_2^2 \geq 1.\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\nu(a^{-k}V) = \infty$$

En effet, V contient un ouvert et ne peut donc être de mesure nulle. Ainsi, $f\star\varphi\notin L^2(G)$, et G ne peut pas posséder la propriété DR. $\square$

Exemples de transmissions élémentaires de la propriété DR

On commence par la transmission de la propriété DR aux sous-groupes.

Théorème 14 *Si (G, ℓ) a la propriété DR et si H est un sous-groupe ouvert de G, alors (H, ℓ_H) a la propriété DR.*

Démonstration. Cela découle directement du fait que la mesure de HAAR sur H est la restriction à H de celle sur G. □

Contre-exemple 15 Cette transmission de la propriété DR n'est pas systématique pour les sous-groupes quelconques. Par exemple, un groupe de Lie semi-simple connexe non compact G et de centre fini avec une décomposition d'IWASAWA $G = NAK$ possède la propriété DR (voir le théorème 78), alors que NA ne la vérifie pas car non unimodulaire en général (théorème 13). Un exemple simple est donné par $G = SL_n(\mathbb{R})$, où NA est constitué des matrices triangulaires supérieures de déterminant unité.

Une autre propriété de transmission attendue concerne les produits directs.

Théorème 16 [CPS07] *Si G_1 (G_2) est un groupe engendré par un compact, on note ℓ_1 (ℓ_2) la longueur correspondante. On pose $G = G_1 \times G_2$ et $\ell = \ell_1 + \ell_2$ est une longueur pour G. Alors (G, ℓ) a la propriété DR si et seulement si (G_1, ℓ_1) et (G_2, ℓ_2) l'ont.*

Démonstration. On commence par considérer deux groupes G_1 et G_2 possédant la propriété DR, et on note P_1 et P_2 les polynômes correspondant à la définition de cette propriété. Soit $f \in \mathcal{C}_c(G)$. On définit alors pour $x \in G_1$ la fonction

$$f_1(x) = \sqrt{\int_{G_2} |f(x,y)|^2 dy}$$

On vérifie que $f_1 \in \mathcal{C}_c(G_1)$. De plus, $||f||_2 = ||f_1||_{2,G_1}$. On suppose de plus que le support de f est inclus dans la boule $B_\ell(r)$ de rayon $r \geq 0$, avec $\ell = \ell_1 + \ell_2$. Soit $x_1 \in G_1$, alors pour $g \in L^2(G)$,

$$\begin{aligned}
& \int_{G_2} \left| \int_{G_1 \times G_2} f(y_1, y_2) g(y_1^{-1}x_1, y_2^{-1}x_2)\, dy_1 dy_2 \right|^2 dx_2 \\
\leq\ & \left(\int_{G_1} \left(\int_{G_2} \left| \int_{G_2} f(y_1, y_2) g(y_1^{-1}x_1, y_2^{-1}x_2) dy_2 \right|^2 dx_2 \right)^{1/2} dy_1 \right)^2 \quad \text{(MINKOWSKI)} \\
\leq\ & P_2(r)^2 \left| \int_{G_1} f_1(y_1) g_1(y_1^{-1}x_1) dy_1 \right|^2 \quad \text{(DR pour } G_2\text{)}
\end{aligned}$$

On intègre alors sur G_1 par rapport à x_1

$$||\lambda(f)(g)||_2 \leq P_2(r)||\lambda(f_1)(g_1)\|_{2,G_1} \leq P_1(r)P_2(r)\|f\|_2\|g\|_2$$

Ainsi, (G, ℓ) possède la propriété DR.

Réciproquement, supposons que G possède la propriété DR. On va la montrer pour G_1. Soit $f_1 \in \mathcal{C}_c(G_1)$, à support inclus dans $B_{\ell_1}(r)$ pour $r \geq 0$. On prend un voisinage compact U de e dans G_2 et on pose $M_U = \sup_U \ell_2$. On définit alors la fonction f sur G par

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1)\mathbf{1}_U(y_2),$$

pour tout $(y_1, y_2) \in G$. On note λ_i l'opérateur de convolution dans G_i. Comme

$$||\lambda_1(f_1)||_{2\to2}||\lambda_2(\mathbf{1}_U)||_{2\to2} \leq ||\lambda(f)||_{2\to2},$$

on obtient en notant P le polynôme lié à la propriété DR de G :

$$||\lambda_1(f_1)||_{2\to2} \leq \frac{1}{||\lambda_2(\mathbf{1}_U)||_{2\to2}} P(M_U + r)||f||_2$$

Ce dernier terme peut être majoré par $Q(r)||f_1||_{2,G_1}$, où Q est un polynôme. Cela établit la propriété DR pour G_1. $\square$

En revanche, la transmission de la propriété DR par produits semi-directs n'est pas envisageable. Le groupe affine constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ s'identifie à un produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$. Le groupe affine ne possède pas la propriété DR car il n'est pas unimodulaire, contrairement à $\mathbb{R}$. On peut par exemple établir la propriété moins forte suivante. Celle-ci n'étant pas utilisée par la suite, la démonstration ne sera pas explicitée ici.

Théorème 17 [CPS07] *Soit* $1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ *une suite exacte de groupes engendrés par des compacts, et on suppose K compact. Alors, G a la propriété DR si et seulement si H l'a.*

Ces deux derniers théorèmes 16 et 17 sont cohérents. En effet, on peut toujours associer à un produit direct une suite exacte. K, étant compact, possède la propriété DR (théorème 12). On comprend alors pourquoi la propriété DR de G n'est liée qu'à celle de H.

5 Groupes moyennables

La notion de groupe moyennable intervient naturellement dans les questions de décroissance rapide.

Définition 18 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une* moyenne *m sur X est une application de tous les éléments de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ telle que*

- $m(\emptyset) = 0$*;*

- *pour toute famille* **finie** $A_1,\ldots,A_n$ *de parties de* X *appartenant à* $\mathcal{A}$ *et deux à deux disjointes,*

$$m(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i);$$

- $m(X) = 1$.

Définition 19 *Soit* G *un groupe localement compact.* G *est dit* moyennable *s'il existe une moyenne sur* G *muni de ses boréliens qui est invariante à gauche, c'est-à-dire* $m(gA) = m(A)$ *pour tout* $g \in G$ *et tout borélien* $A \subset G$.

Il est équivalent de se donner une moyenne m ou une forme linéaire $\tilde{m}$ sur l'espace $L^\infty(G)$ des fonctions bornées presque partout de G, qui soit continue, positive, et telle que $\tilde{m}(g \mapsto 1) = 1$. En effet, une telle forme linéaire $\tilde{m}$ permet de définir une mesure m finiment additive par $m(A) = \tilde{m}(\mathbf{1_A})$. Réciproquement, si m est finiment additive, la formule précédente permet par linéarité de définir une forme linéaire positive de norme inférieure à 1 sur les fonctions étagées. Vu la densité des fonctions étagées dans $L^\infty(G)$, cette forme linéaire se prolonge en une forme continue sur L^∞.

Il existe des liens naturels entre la moyennabilité d'un groupe et celle des ensembles sur lesquels G agit, notamment concernant les compacts convexes.

Théorème 20 (point fixe de KAKUTANI) *Soit* K *un compact convexe (non vide) d'un espace vectoriel topologique (séparé) localement convexe* E*. Alors, toute application affine continue* $T : K \to K$ *admet un point fixe.*

Démonstration. Soit $a \in K$, et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(a)$. On va montrer que $T(u_n) - u_n$ tend vers 0 pour la topologie faible. Soit $l \in E^*$,

$$l(T(u_n) - u_n) = \frac{1}{n} l(T^n(a) - a)$$

Comme $l(K)$ est borné, la quantité précédente tend bien vers 0. On considère alors une valeur d'adhérence u de u_n. Elle vérifie $T(u) = u$. □

Théorème 21 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. G *est moyennable ;*
2. *pour tout espace toplogique* X *sur lequel* G *agit, il existe une moyenne* G*-invariante sur* X *;*
3. G *possède une propriété de point fixe : toute action affine continue de* G *sur un convexe compact (non vide)* K *d'un espace vectoriel topologique localement convexe admet un point fixe.*

Démonstration. 1. implique 2. Soit m une moyenne sur G. On choisit $x \in X$ et $\pi : G \to X$ telle que $\pi(g) = g.x$. On vérifie que pour une partie mesurable A, $m'(A) = m(\pi^{-1}(A))$ convient.

2. implique clairement 1. en prenant l'action à gauche de G sur lui-même.

2. implique 3. La moyenne invariante sur X est en fait une mesure de probabilité μ G-invariante à gauche pour X compact. Alors le barycentre $\int_K x\, d\mu(dx)$ de K pour cette mesure est un point fixe.

3. implique 2. On indique succintement le raisonnement. G agit sur les moyennes sur G par $(g.m)(A) = m(g^{-1}A)$ pour A partie mesurable de G, m moyenne sur G et $g \in G$. L'ensemble des moyennes sur G (formes linéaires continues, positives et normalisées) est une partie non vide, convexe, bornée et fermée de $L^\infty(G)$ pour la topologie $\star$-faible donc compacte. On utilise alors le théorème du point fixe pour montrer l'existence d'une moyenne invariante.

□

On peut alors énoncer les cas les plus simples de groupes moyennables.

Théorème 22 *On a les propriétés classiques suivantes :*

1. *les groupes finis sont moyennables ;*
2. *les groupes compacts sont moyennables ;*
3. *un sous-groupe fermé d'un groupe moyennable est moyennable ;*
4. *si on a la suite exacte :*

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H' \longrightarrow 1 ,$$

   alors G est moyennable si et seulement si H et H' sont moyennables ;

5. *les groupes commutatifs sont moyennables ;*
6. *les groupes résolubles sont moyennables.*

Démonstration. 1. La mesure de comptage normalisée convient pour un groupe fini.

2. La mesure de HAAR normalisée convient pour un groupe compact.

3. Nous donnons dans la suite les démonstrations dans le cas des groupes discrets. Pour les groupes commutatifs, la preuve du caractère moyennable se révèle moins directe que les autres, et on consultera [Gre69]. On donne ici une preuve pour les groupes discrets.

Soit H un sous-groupe de G. On note m une moyenne sur G. H agit sur G par multiplication à gauche. Soit A une partie mesurable de H. On appelle R un ensemble constitué d'un système de représentants de chaque orbite. On définit une moyenne m' sur H par $m'(A) = m(AR)$.

4. Soit G un groupe moyennable. D'après 2., H est moyennable. Soit A une partie de H'. On pose $m'(A) = m(p^{-1}(A))$, où m est une mesure sur G. Alors, m' est une moyenne sur H'.

Réciproquement, on suppose H et H' moyennables. Soit une action affine continue de G sur un compact convexe K. Elle induit une action de H qui est moyennable, donc le compact convexe K' des points fixes de cette action est non vide. G agit sur K' par action affine continue, et H est contenu dans le noyau de cette action. On en déduit une action de G/H sur K' qui a un point fixe, qui est aussi fixe pour l'action de G.

5. Soit une action affine continue de G sur un convexe compact K. Par théorème de point fixe 20, l'ensemble K_g des points fixés par $g \in G$ est non vide. Pour $g' \in G$, comme g et g' commutent, K_g est stable par g', et donc comprend un point fixe. Ainsi, toutes les intersections finies de K_g sont non vides. Par propriété d'intersection finie des compacts, $\cap_{g \in G} K_g \neq \emptyset$.

6. On déduit ce résultat des points 4. et 5. en utilisant une chaîne normale.

□

Exemple 23 $\mathbb{Z}$ est moyennable car commutatif d'après le théorème précédent 22. On peut se demander quelle est la forme explicite d'une telle moyenne. Moralement, on voudrait écrire

$$\text{moyenne}(f) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(k)$$

pour $f \in L^\infty(\mathbb{Z})$ mais cette expression n'a pas forcément de sens.

Plus précisément, si $f \in L^\infty(\mathbb{Z})$ est telle que

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(k)$$

a une limite quand N tend vers l'infini, on peut utiliser cette moyenne pour définir une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel constitué par ce type de fonctions. On peut ensuite étendre cette forme linéaire à $L^\infty(\mathbb{Z})$ par le théorème de HAHN-BANACH. Le même style de procédé permet de construire une moyenne sur $\mathbb{R}$;

Contre-exemple 24

- Le groupe libre F_2 à deux générateurs notés a et b n'est pas moyennable. En effet, on note a, b deux générateurs du groupe $F_2 = \langle a, b \rangle$. On appelle A^+ (respectivement A^-, B^+, B^-) le sous-ensemble de F_2 constitué des éléments dont l'écriture sous forme réduite commence par a (resp. a^{-1}, b, b^{-1}). Alors, en regardant l'écriture des éléments, $F_2 = \{e\} \cup A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^-$, où les unions sont disjointes. Similairement, $A^+ = \{a\} \cup aA^+ \cup aB^+ \cup aB^-$, où les unions sont encore disjointes. S'il existe une moyenne m sur F_2, alors

$$\begin{aligned} m(A^+) &= m(\{a\}) + m(aA^+) + m(aB^+) + m(aB^-) \\ &= m(\{e\}) + m(A^+) + m(B^+) + m(B^-) \end{aligned}$$

On déduit $m(\{e\}) = m(B^+) = m(B^-) = 0$. De même, on montre $m(A^-) = m(A^+) = 0$ et par conséquent $m(F_2) = 0$, ce qui est contradictoire ;

- Les groupes de Lie semi-simples non compacts comme $SL_n(\mathbb{R})$ ou $SO(p,q)_0$ ne sont pas moyennables. Une justification indirecte utilise des résultats démontrés ultérieurement. Ces groupes sont connexes à centre fini donc possèdent la propriété DR (théorème 101). Il ne sont pas de type R, donc leur croissance est exponentielle d'après le théorème 55. Par conséquent, ils ne sont pas moyennables (théorème 61).

On va énoncer une caractérisation classique, mais non élémentaire, des groupes moyennables.

Théorème 25 [Lep68] *Soit G un groupe localement compact. G est moyennable si et seulement si pour tout fonction positive intégrable f, $||\lambda(f)||_{2\to 2} = ||f||_1$.*

On rappelle que de manière générale, $||\lambda(f)_{2\to 2}|| \leq ||f||_1$ pour une fonction intégrable f.

Démonstration. On consultera [Lep68]. □

Ce résultat explique pourquoi la moyennabilité va jouer un rôle important dans la caractérisation des groupes possédant la propriété DR.

6 Intégration sur les espaces homogènes

Définition 26 *Un espace topologique X est dit homogène si un groupe G agit à gauche de manière continue et transitive, et si pour tout $x \in X$, l'application $\pi_x : G \to X$ telle que $\pi_x(g) = g.x$ est ouverte.*

On supposera implicitement que le stabilisateur H d'un certain point est un sous-groupe fermé de G, ce qui est équivalent à dire que la topologie quotient sur G/H est séparée. On identifiera alors $X \simeq G/H$.

On cherche à lier l'intégration sur G et sur G/H. Tout d'abord, on cherche un lien entre les fonctions continues à support compact sur ces deux espaces. Dans la suite, on supposera G localement compact, et H un sous-groupe fermé de G.

Théorème 27 (WEIL) *L'application*

$$\mathcal{C}_c(G) \to \mathcal{C}_c(G/H) \qquad f \mapsto \bar{f}$$

avec $\bar{f}(xH) = \displaystyle\int_H f(xh)\,dh$ est une surjection.

On vérifie que, par invariance à gauche de la mesure de HAAR sur H et par théorème de convergence dominée, cette application est bien définie. Le caractère surjectif est un peu plus délicat [Kna02].

On voudrait alors naturellement définir une mesure sur G/H vérifiant

$$\int_{G/H} \left(\int_H f(xh)dh \right) d(xH) = \int_{G/H} \bar{f}(xH)\,d(xH) = \int_G f(y)\,dy$$

pour toute $f \in \mathcal{C}_c(G)$, c'est-à-dire de manière succinte $dg = d(xH)dh$. Cette propriété n'est pas immédiate car si on définit l'action à droite de G sur $\mathcal{C}_c(G)$ par $R(s)(f)(x) = f(xs)$ pour $s \in H$ et $x \in G$,

$$\int_G R(s)(f)(x)dx = \int_G f(xs)\,dx = \Delta_G(s^{-1}) \int_G f(x)\,dx,$$

où Δ_G (Δ_H) est le module de G (H). D'autre part,

$$\int_{G/H} \left(\int_H R(s)(f)(xh)dh \right) d(xH) = \Delta_H(s^{-1}) \int_{G/H} \left(\int_H f(xh)dh \right) d(xH)$$

Alors, forcément, $\Delta_G(s) = \Delta_H(s)$: le module de H s'identifie nécessairement à la restriction à H de celui de G. Cette condition s'avère en fait être suffisante.

Théorème 28 (WEIL) *Il existe une mesure borélienne G-invariante (à gauche) sur G/H si et seulement si le module de H correspond à la restriction du module de G sur H :*

$$\forall h \in H,\ \Delta_H(h) = \Delta_G(h)$$

Cette mesure est alors unique à une constante multiplicative près, et on peut choisir cette constante telle que

$$\int_G f(y)dy = \int_{G/H} \left(\int_H f(xh)dh \right) d(xH)$$

pour toute $f \in \mathcal{C}_c(G)$.

Démonstration. On a expliqué ci-dessus le caractère nécessaire. Pour le retour, on pourra consulter [Kna02]. □

Contre-exemple 29 Cette condition d'égalité des modules entre groupe et sous-groupe n'est évidemment pas une nécessité comme on peut le voir avec $G = GL_2(\mathbb{R})$ qui est unimodulaire et H le sous-groupe affine (fermé) non unimodulaire constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemple 30 En revanche, si H est compact, les hypothèses du théorème précédent 28 sont automatiquement vérifiées car alors $\Delta_H \equiv 1$ et pour tout $h \in H,\ \Delta_G(h) = 1$.

Chapitre II

Croissance des groupes

Les résultats rappelés ici sont ceux de GUIVARC'H [Gui73] et JENKINS [Jen73]. Ils concernent les groupes localement compacts engendrés par des compacts. Les longueurs considérées seront obligatoirement des longueurs de mots.

1 Introduction à la croissance des groupes

Définition 31 *On définit sur l'ensemble des suites positives le préordre $\preccurlyeq$ suivant. Si $u = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ et $v = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ sont deux suites réelles positives,*

$$u \preccurlyeq v \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq c\, v_{kn}$$

On note $\approx$ la relation d'équivalence associée.

Exemple 32 On peut ainsi vérifier que $u_n = 2^n$ est dans la même classe que $v_n = 3^n$: c'est la classe exponentielle. $w_n = n^d$, où $d \in \mathbb{N}$, représente la classe polynomiale de degré d. On vérifie aisément qu'un élément de la classe polynomiale est non équivalent et inférieur à un élement de la classe exponentielle.

Définition 33 *On appelle croissance d'un groupe G muni d'une longueur ℓ la classe d'équivalence de la suite u définie par $u_n = \nu(B_\ell(n))$, où ν est une mesure de* HAAR *sur G et $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 34 Pour un groupe engendré par un compact K, $u_n = \nu(K^n)$. Il est simple de vérifier que la croissance d'un tel groupe ne dépend pas du compact choisi. Ainsi, si K et K' sont deux compacts générateurs, il existe un entier k tel que $K \subset K'^k$. Ainsi, $u_n = \nu(K^n) \leq \nu(K'^{kn}) = u'_{kn}$. On montre similairement l'inégalité inverse. On peut citer :

- si $G = \mathbb{R}^k$, on choisit $K = \bar{B}(0,1)$. Alors, $K^n = \bar{B}(0,n)$ et $\nu(K^n) = \dfrac{2\pi^{k/2}}{k\Gamma(k/2)} n^k$ en utilisant la mesure de Lebesgue comme mesure de HAAR. Cette classe d'équivalence de croissance est dite polynomiale de degré k ;

- si G est le groupe libre F_2 à deux générateurs a, b. On choisit $K = \{e, a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. Alors, en utilisant la mesure de comptage, $\nu(K^n) = 2(3^n - 1) + 1$. Cette classe d'équivalence de croissance est appelée exponentielle.

La relation d'ordre sur la croissance des groupes respecte l'inclusion : si H est un sous-groupe fermé de G, alors G croît au moins aussi vite que H.

Théorème 35 [Gui73] *Soit G un groupe localement compact engendré par un compact, et soit H un sous-groupe fermé de G, aussi engendré par un compact. Alors, la croissance de G est supérieure ou égale à celle de H.*

Démonstration. Soit K un voisinage compact symétrique de e dans G et $L = K \cap H$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in G$,

$$\mathbf{1}_{L^n} \star_H \mathbf{1}_K(x) = \int_H \mathbf{1}_{L^n}(h)\mathbf{1}_K(h^{-1}x)\, dh = \nu_H(L^n \cap xK),$$

où ν_H (ν) est une mesure de HAAR sur H (G).

Or, $(L^n \cap xK) \subset (H \cap xK)$ qui est vide sauf si $x \in HK$. Dans ce cas,

$$\nu_H(H \cap xK) \leq \nu_H(H \cap K^2)$$

Comme d'autre part,

$$\int_G \mathbf{1}_{L^n} \star_H \mathbf{1}_K(x)\, dx = \nu_H(L^n)\nu(K),$$

on déduit

$$\nu_H(L^n)\nu(K) \leq \nu_H(H \cap K^2)\nu(L^n K)$$

On choisit alors K engendrant G et tel que $L = H \cap K$ engendre H. Comme $\nu(L^n K) \leq \nu(K^{n+1})$, on aboutit au résultat. □

On va donner deux relations de transmission de la croissance, par rapport aux quotients.

Théorème 36 [Gui73] *Soit G un groupe localement compact engendré par un compact et H un sous-groupe distingué fermé de G. Alors G est à croissance au moins aussi rapide que G/H.*

Démonstration. On considère $X = G/H$, muni d'une mesure de HAAR (à gauche). On note $\pi : G \to G/H$ la srujection canonique. Soit K un voisinage compact de e dans G (et engendrant G) et $L = K \cap H$. Comme pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\nu_G(K^n L) = \int_{G/H} d(xH) \int_H dh\, \mathbf{1}_{K^n L}(xh) \quad &\geq \int_{G/H} d(xH) \int_H dh\, \mathbf{1}_{K^n}(x)\mathbf{1}_L(h) \\ &= \nu_{G/H}(\pi(K^n))\nu_H(L)\end{aligned}$$

Comme L est un voisinage de e dans H, $\nu_H(L) > 0$ et ce résultat permet de conclure vu que

$$\nu_{G/H}(\pi(K)^n)\nu_H(L) \leq \nu_G(K^n L) \leq \nu_G(K^{n+1})$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Une conséquence immédiate est qu'un groupe de Lie connexe croît moins vite que son recouvrement universel.

Théorème 37 [Gui73] *Soit G un groupe localement compact engendré par un compact et H un sous-groupe fermé de G, aussi engendré par un compact. Si G/H est compact, G et H ont même croissance.*

Démonstration. Soit C un voisinage compact de e dans H engendrant H. On note K un compact voisinage de e dans G et l'engendrant tel que $G = HK$. Alors, $G = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} C^n K$ et il existe un entier p tel que $K^2 \subset C^p K$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(u_n) = (c_n k_n)$ ($c_n \in H$, $k_n \in K$) d'éléments de K^2 tels que $c_n k_n \notin C^n K$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Quite à prendre des suites extraites, u_n et k_n convergent vu qu'elles sont à valeur dans un compact. Ainsi, c_n tend vers $c \in H$ car H fermé. Il existe p tel que $c \in C^p$. Alors, C^{p+1} est un voisinage de c et contient les éléments de la suite (c_n) à partir d'un certain rang. Donc $C^{p+1}K$ contient les éléments de la suite $(c_n k_n)$ à partir d'un certain rang, ce qui est contradictoire.

On pose alors $W = C^p$, et par récurrence, $K^{n+1} \subset K^n V$ pour tout $n \geq 1$. On applique ensuite le lemme 38 avec $A = W$, $B = W^n$ et $C = K$:

$$\nu(W)\nu(W^n K) \leq \nu(W^{n+1})\nu(W^{-1}K)$$

On déduit alors

$$\nu(K^{n+1}) \leq c\nu(W^{n+1})$$

avec c une constante indépendante de n. Ainsi, G croît aussi moins vite que H. Or, G croît plus vite que H d'après le théorème 35. $\square$

Lemme 38 *Soit G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G. On note A, B des compacts de H et C un compact de G. Alors*

$$\nu_H(A)\nu_G(BC) \leq \nu_H(BA)\nu_G(A^{-1}C)$$

où ν_H (ν_G) est une mesure de HAAR *(à gauche) de H (G).*

Démonstration. On considère la convolée $f = \mathbf{1}_{BA} \star_H \mathbf{1}_{A^{-1}C}$. D'après le théorème de FUBINI,

$$\int_G f(x)\,dx = \nu_H(BA)\nu_G(A^{-1}C)$$

Si $x \in G$, $f(x)$ est égale à la mesure par ν_H de $E_x = \{y \in H : \; y \in BA \text{ et } y^{-1}x \in A^{-1}C\}$. Soit alors $x \in BC$: $x = bc$, où $b \in B$ et $c \in C$. On pose $y = ba$, pour un certain $a \in A$. Alors $y \in BA$ et $x = bc = ya^{-1}c \in yA^{-1}C$. Ainsi, pour tout $a \in A$, on a fabriqué un élément de E_x lorsque $x \in BC$. On déduit $\nu_H(E_x) \geq \nu_H(A)$ et par conséquent

$$\int_G f(x)\,dx \geq \int_G f(x)\mathbf{1}_{BC}(x)\,dx \geq \nu_G(BC)\nu_H(A).$$

On obtient alors le résultat. □

Deux classes de croissances de groupes sont particulièrement importantes : croissances polynomiales et exponentielle. On va caractériser quelques types de groupes possédant ces croissances.

Théorème 39 *Un groupe commutatif, engendré par un compact, a une croissance au plus polynomiale.*

Démonstration. Un tel groupe s'identifie forcément par isomorphisme de groupes topologiques à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q \times \mathbb{Z}^r \times G_f$, où $p, q, r \in \mathbb{N}$ et G_f est un groupe fini (théorème de PONTRYAGIN). Chacun des membres du produit direct est à croissance au plus polynomiale, ce qui permet de conclure. □

En fait, la croissance des groupes localement compacts et engendrés par un compact ne peut pas être arbitrairement rapide.

Théorème 40 [Gui73] *Les groupes localement compacts engendrés par des compacts sont à croissance au plus exponentielle.*

Démonstration. Soit alors K un compact symétrique engendrant G et voisinage de e. On applique l'inégalité du lemme 38 avec $G = H$, $A = K$, $B = K^m$ et $C = K^n$ pour $m, n \in \mathbb{N}$, puis avec $A = K$, $B = K^{n-1}$ ou K^{m-1} et $C = K^2$ pour $m, n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ \nu(K^{m+n}) \leq \frac{\nu(K^{n+1})\nu(K^{m+1})}{\nu(K)} \leq \frac{\nu(K^3)^2}{\nu(K)^3}\nu(K^n)\nu(K^m) \tag{2.1}$$

On pose alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln \nu(K^{n+1})$. Cette suite est positive pour un bon choix de la mesure de HAAR, croissante et sous-additive car il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_{n+m} \leq u_{n+m+1} \leq u_n + u_m + \alpha$$

Comme on le rappelle dans le lemme 41, u_n/n converge quand n tend vers l'infini.

La suite $\nu(K^n)^{1/n}$ a donc une limite quand n tend vers l'infini. Cette limite est supérieure à 1 car (u_n) est positive. Si la limite est strictement supérieure à 1, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $1 < \alpha \leq \beta$ et

$$\alpha \leq \nu(K^n)^{1/n} \leq \beta, \quad \text{soit } \alpha^n \leq \nu(K^n) \leq \beta^n$$

pour n assez grand. Dans ce cas, la croissance du groupe est exponentielle. Si la limite vaut 1, la croissance du groupe est strictement plus faible qu'exponentielle. □

Lemme 41 (Suites sous-additives) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive sous-additive, c'est-à-dire telle que*

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ u_{m+n} \leq c + u_m + u_n,$$

où $c \in \mathbb{R}$. Alors u_n/n converge quand $n \to \infty$.

Démonstration. Déjà, comme la suite est positive, sa limite inférieure est bien définie.

Soit $b \in \mathbb{N}^*$. On réalise la division euclidienne de n par b : il existe deux entiers naturels r et q, avec $0 \leq q \leq b - 1$ tels que $n = bq + r$. On déduit

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{cq}{bq + r} + \frac{bq}{bq + r}\frac{u_b}{b} + \frac{u_r}{bq + r}$$

Alors,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_b}{b} + \frac{c}{b}$$

On en déduit que les limites supérieures et inférieures de $(u_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ coïncident : cette suite converge. □

Il existe un lien entre le module d'un groupe et sa croissance. Les groupes à croissance non exponentielle sont forcément unimodulaires.

Théorème 42 [Gui73] *Si un groupe G localement compact et engendré par un compact n'est pas unimodulaire, G est à croissance exponentielle.*

Démonstration. Soit K un voisinage compact symétrique de e. Alors, si G n'est pas unimodulaire, il existe $g \in G$ tel que $\Delta(g) > 1$, où Δ est le module de G. Soit $n \in \mathbb{N}$, ainsi

$$\nu(g^n K g^{-n}) = \Delta(g)^n \nu(K)$$

Or, $g^n K g^{-n} \subset K^{2n+1}$. On déduit alors

$$\Delta(g)^n \nu(K) \leq \nu(K^{2n+1}),$$

ce qui implique la croissance exponentielle du groupe. □

Exemple 43 On peut ainsi constater que $GL_n(\mathbb{R})$ est à croissance exponentielle (bien qu'unimodulaire). En effet, $GL_n(\mathbb{R})$ possède comme sous-groupe fermé H le groupe affine (groupe "$ax + b$"), s'identifiant à l'ensemble

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\right\}$$

Ce sous-groupe n'étant pas unimodulaire, il est à croissance exponentielle (théorème 42), et il en est ainsi de $GL_n(\mathbb{R})$ (théorème 35).

Théorème 44 [Gui73] *Soit G un groupe localement compact engendré par un compact. Si la croissance de G est strictement inférieure à la croissance exponentielle, G est moyennable.*

Démonstration. Soit G à croissance strictement inférieure à la croissance exponentielle, engendré par le compact symétrique K. Alors, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln \frac{\nu(K^k)}{\nu(K^{k-1})} = \ln\left(\frac{\nu(K^n)}{\nu(K)}\right)^{1/n}$$

et cette quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini vu la croissance de G. Or, la suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = \left(\ln \dfrac{\nu(K^k)}{\nu(K^{k-1})}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est positive et bornée d'après la majoration (2.1) pour $n = k$ et $m = 1$. Cette suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens de CÉSARO vers 0, donc elle converge elle-même vers 0 lorsque k tend vers l'infini en décrivant un ensemble E de densité 1 dans $\mathbb{N}^*$ (on entend par là que $\mu(E\cap[1,n])/n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, μ étant la mesure de comptage de $\mathbb{N}^*$).

On vérifie alors une condition de FØLNER qui implique de manière classique la moyennabilité [Lep68]. Soit A un compact de G, avec $A \subset K$. Si $x \in A$, alors $xK^n \subset K^{n+1}$, et

$$\frac{\nu(xK^n\Delta K^n)}{\nu(K^n)} \leq 2\frac{\nu(K^{n+1}) - \nu(K^n)}{\nu(K^n)}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini en décrivant un ensemble de densité 1 (Δ est la différence symétrique). Ainsi, si $\varepsilon > 0$ est fixé, pour n assez grand et tout $x \in K$,

$$\frac{\nu(xK^n\Delta K^n)}{\nu(K^n)} \leq \varepsilon$$

et G est moyennable. □

On a donc facilement trouvé des groupes à croissance exponentielle (comme le groupe libre à deux générateurs) ou polynomiale ($\mathbb{R}$ par exemple). L'existence de groupes à croissance intermédiaire (c'est-à-dire strictement inférieure à une croissance exponentielle, mais tout de même non polynomiale) est un problème posé par MILNOR en 1968. GRIGORCHUK a construit un tel groupe en 1984 comme sous-groupe des automorphismes d'un arbre binaire. Néanmoins, on va montrer dans la partie suivante que le cas des groupes de Lie connexes, seules les croissances exponentielles et polynomiales sont possibles.

2 Groupes de Lie de type R

On commence par rappeler quelques définitions et conséquences classiques.

Définition 45 (radical) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (de dimension finie).*

Il existe un unique idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, appelé radical de $\mathfrak{g}$, qui contient tout idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Le quotient de $\mathfrak{g}$ par son radical est une algèbre de Lie semi-simple.

Définition 46 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (de dimension finie). $\mathfrak{g}$ est dite unimodulaire si pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $Tr_{\mathfrak{g}}(ad\, X) = 0$.*

Il existe évidemment un lien entre groupes et algèbres unimodulaires.

Corollaire 47 *Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ est unimodulaire en tant qu'algèbre si et seulement si G est unimodulaire en tant que groupe.*

Démonstration. On va montrer le caractère nécessaire. Il découle de la formule donnant le module d'un groupe de Lie connexe : pour $X \in \mathfrak{g}$,
$\Delta(\exp X) = |\mathrm{Det}\,(\mathrm{Ad}\,\exp X)|^{-1} = |\mathrm{Det}\,(\exp\,\mathrm{ad}(X))|^{-1} = |\exp(\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}(X))^{-1}| = 1$ □

On rappelle la définition d'un produit semi-direct. Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux algèbres de Lie, et π un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{b}$ dans $Der(\mathfrak{a})$. Alors, il existe une unique structure d'algèbre de Lie sur la somme directe $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, conservant les structures de Lie sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ et telle que $[B, A] = \pi(B)(A)$ pour $A \in \mathfrak{a}$ et $B \in \mathfrak{b}$. Cette structure sera notée $\mathfrak{a} \rtimes_\pi \mathfrak{b}$. Dans cette structure, $\mathfrak{a}$ s'identifie à un idéal et $\mathfrak{b}$ à une sous-algèbre. Le produit (ou somme) directe correspond à $\pi = 0$.

La décomposition de LEVI permet de ramener une algèbre de Lie réelle à un produit semi-direct bien particulier.

Théorème 48 (décomposition de LEVI) [Kna02] *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle (de dimension finie). Alors $\mathfrak{g}$ s'écrit comme produit semi-direct de son radical $\mathfrak{q}$ par une algèbre de Lie semi-simple (ou nulle) $\mathfrak{s}$.*

On va tout alors caractériser certaines algèbres de Lie.

Définition 49 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle et $\mathfrak{q}$ son radical. On dit que $\mathfrak{g}$ est moyennable si $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ est de type compact ou nulle.*

On rappelle que $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ est forcément semi-simple (ou nulle) et correspond au facteur de LEVI de la décomposition correspondante.

On dispose d'un rapport direct entre cette dernière définition et la notion de groupe moyennable.

Théorème 50 *Soit G un groupe de Lie réel connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, G est moyennable en tant que groupe si et seulement si $\mathfrak{g}$ est moyennable en tant qu'algèbre de Lie.*

Démonstration. Soit G un groupe de Lie réel connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. G est moyennable si et seulement si son recouvrement universel $\tilde{G}$ l'est. Soit $\tilde{Q}$ ($\tilde{S}$) le sous-groupe immergé connexe fermé [Kna02] d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{s}$) ($\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{s}$ proviennent de la décomposition de LEVI, théorème 48). $\tilde{S}$ est de plus simplement connexe [Kna02].

On suppose $\mathfrak{g}$ moyennable. Alors, $1 \to \tilde{Q} \to \tilde{G} \to \tilde{S} \to 1$ est une suite exacte. Comme $\tilde{Q}$ et $\tilde{S}$ sont moyennables (car respectivement résolubles et compacts), G est moyennable (théorème 22).

Réciproquement, si $\tilde{G}$ est moyennable, le sous-groupe $\tilde{S}$ introduit précédemment aussi. $\mathfrak{s}$ est semi-simple. Si on considère une décomposition d'IWASAWA (théorème 73), $\tilde{S} = \tilde{K}\tilde{S}_1$ ($\tilde{S}_1 = NA$), alors $\tilde{S}$ est moyennable si et seulement si $\tilde{S}_1$ est unimodulaire [CPS07]. Or, $\tilde{S}_1$ est non unimodulaire dès qu'il est non trivial. Ainsi un groupe de Lie semi-simple moyennable est forcément d'algèbre de Lie compacte. □

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il est usuel pour tout $X \in \mathfrak{g}$ de définir la dérivation $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telle que $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. On s'intéresse alors aux valeurs propres de $\mathrm{ad}(X)$.

Définition 51 *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite de type R (rigide) si toutes les valeurs propres de $ad(X)$ sont imaginaires pures quel que soit $X \in \mathfrak{g}$.*

Un groupe de Lie est dit de type R si son algèbre de Lie est de type R.

On peut citer quelques cas concrets. Les algèbres de Lie compactes sont de type R. Les algèbres de Lie nilpotentes sont aussi de type R. En revanche, $SL_n(\mathbb{R})$ n'est pas de type R.

Corollaire 52 *Une R-algèbre est moyennable.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ une R-algèbre de radical $\mathfrak{q}$. On supposera $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ non nulle, sinon la conclusion est évidente.

La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ a ses valeurs propres imaginaires pures. Cette représentation induit celle de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$, toujours à valeurs propres imaginaires pures. On déduit que celle de $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ a toutes ses valeurs propres imaginaires pures. La forme de KILLING est alors définie (car $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ est semi-simple) et négative. Donc $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ est compacte. □

Une autre catégorie de groupes est constituée des F-groupes. On va énoncer quelques définitions préalables. Pour $a, b \in G$, on définit le sous-semigroupe $[a, b]$ par

$$[a,b] = \{x_1 \dots x_n : \ n \in \mathbb{N}^*, \text{ et } \forall\, 1 \leq i \leq n, \ x_i \in \{a, b\}\}$$

$[a, b]$ est dit libre si $a[a, b] \cap b[a, b] = \emptyset$.

Une partie S d'un groupe G est dite *uniformément discrète* s'il existe un voisinage compact U de l'élément neutre tel que pour tous $x, y \in S$, $xU \cap yU = \emptyset$.

Définition 53 *Un groupe localement compact G est de type F s'il existe $a, b \in G$ tels que le sous-semigroupe engendré par a et b soit libre et uniformément discret.*

Théorème 54 *Un groupe G localement compact, engendré par un compact, et de type F est à croissance exponentielle.*

Démonstration. On note $F_{a,b}$ le sous-semigroupe libre uniformément discret associé à G. Soit U un voisinage compact de e tel que pour tous $x, y \in S$, $xU \cap yU = \emptyset$. On considère un voisinage K de e dans G, engendrant G et contenant $aU \cup bU$. Le nombre d'éléments de $F_{a,b}$ de longueur n est 2^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Ainsi,

$$\nu(K^n) \geq 2^n \nu(U)$$

et G est à croissance exponentielle. □

On va aboutir au résultat final de cette partie.

Théorème 55 [Jen73][Gui73] *Soit G un groupe de Lie connexe. Sont équivalents :*

1. *G est à croissance polynomiale ;*
2. *G n'est pas de type F ;*
3. *G est de type R.*

Avant de démontrer le théorème, on énonce la forme finale qu'il prend compte tenu de ce qui précède.

Corollaire 56 *Un groupe de Lie connexe est soit de type R et à croissance polynomiale, soit à croissance exponentielle.*

Démonstration. 1. implique 2. résulte du théorème 54 précédent.

2. implique 3. On va montrer la proposition contraposée. Pour $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ ($\theta_1 \in \mathbb{R}^*$, $\theta_2 \in \mathbb{R}$, on définit l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_\theta$. Si $\theta_2 = 0$, $\mathfrak{g}_\theta$ est de dimension 2 et possède une base (X_1, X_2) telle que

$$[X_1, X_2] = \theta X_2 \tag{2.2}$$

Si $\theta_2 \neq 0$, $\mathfrak{g}_\theta$ est de dimension 3 avec une base (X_1, X_2, X_3) vérifiant

$$[X_1, X_2] = \theta_1 X_2 + \theta_2 X_3 \qquad [X_1, X_3] = \theta_1 X_3 - \theta_2 X_2 \qquad [X_2, X_3] = 0 \tag{2.3}$$

Si G n'est pas de type R, $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre isomorphe à g_θ (lemme 57).

Ensuite, pour $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \neq 0$, on définit le groupe G_θ de la manière suivante. Si $\theta_2 = 0$, G_θ est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ composé des

$$\begin{pmatrix} \exp(t\theta) & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Si $\theta_2 \neq 0$, G_θ est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ composé des

$$\begin{pmatrix} \exp(t\theta) & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \tag{2.5}$$

On vérifie que G_θ est connexe, simplement connexe, et d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\theta$. Ainsi, si on note H_θ le sous-groupe de Lie immergé connexe de G, G_θ est ainsi le recouvrement universel de H_θ. Comme le centre de G_θ est trivial, H_θ et G_θ sont isomorphes en tant que groupes de Lie. De plus, il existe $a, b \in G_\theta$ tel que le sous-semigroupe engendré par $[a, b]$ soit libre et uniformément discret (lemme 58), donc G_θ est à croissance exponentielle. Enfin, comme G_θ est un sous-groupe topologique de G (lemme 59), on déduit que G est de type F.

3. implique 1. Soit G un groupe de Lie connexe de type R, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et de recouvrement universel $\tilde{G}$. On va montrer que $\tilde{G}$ est de croissance polynomiale, il en sera de même de G (théorème 36). On considère la décomposition de LEVI (théorème 48) : $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \rtimes_\pi \mathfrak{s}$. On appelle $\tilde{Q}$ ($\tilde{S}$) le sous-groupe immergé connexe et en fait fermé [Kna02] d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{s}$) et $\tilde{S} = \tilde{G}/\tilde{Q}$. Alors, $\tilde{S}$ est semi-simple, connexe, simplement connexe [Kna02] et de type R. En conséquence, sa forme de KILLING est définie négative, et $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{s})$ est compact. $\tilde{S}$ étant le recouvrement universel de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{s})$, il est aussi compact. Comme $\tilde{S}$ $\tilde{S} = \tilde{G}/\tilde{Q}$ est compact, et $\tilde{G}$ et $\tilde{Q}$ ont même croissance (théorème 37).

$\tilde{Q}$ est de croissance plus lente que son recouvrement universel. Par le lemme 60, $\tilde{Q}$ est donc à croissance polynomiale. □

Lemme 57 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle qui n'est pas de type R. Alors, $\mathfrak{g}$ a une sous-algèbre de la forme $\mathfrak{g}_\theta$ définie en* (2.2) *et* (2.3).

Démonstration. Soit $X_1 \in \mathfrak{g}$ tel qu'une valeur propre θ de $\operatorname{ad} X_1$ a une partie réelle non nulle. Si cette valeur propre est réelle, alors il existe $Y \in \mathfrak{g}$ tel que $[X_1, Y] = \theta Y$, ce qui conclut.

Sinon, on suppose que toutes les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ sont non réelles quel que soit $X \in \mathfrak{g}$. θ s'écrit $\theta = \theta_1 - i\theta_2$, avec $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^*$. On complexifie $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, et il existe $X_2, X_3 \in \mathfrak{g}$ tels que

$$[X_1, X_2 + iX_3] = (\theta_1 - i\theta_2)(X_2 + iX_3)$$

On vérifie que $[X_1, X_2]$ et $[X_2, X_3]$ ont bien la forme voulue. Par identité de JACOBI,

$$[X_1, [X_2, X_3]] = 2\theta_1 [X_2, X_3]$$

Alors, forcément, $[X_2, X_3] = 0$. □

Lemme 58 *Soit G_θ un groupe de Lie tel que défini dans* (2.4) *ou* (2.5). *Alors, il existe $a, b \in G_\theta$ tel que le sous-semigroupe engendré par $[a, b]$ soit libre et uniformément discret.*

Démonstration. Comme $\theta \notin i\mathbb{R}$, on peut choisir $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|\exp(\theta t_0)| < 1/3$. On pose dans le groupe G_θ

$$(\theta t, \varphi) = \begin{pmatrix} \exp(\theta t) & \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{R}$ et φ est réel ou complexe suivant θ. On définit $a = (\theta t_0, 1)$ et $b = (\theta t_0, -1)$. Un élément de $s \in [a, b]$ s'écrit sous la forme

$$s = \pm 1 \pm \exp(\theta t_0) \pm \ldots \pm \exp((p-1)\theta t_0, \quad \text{où } p \in \mathbb{N}^*$$

Les éléments de $a[a, b]$ ($b[a, b]$) commencent par 1 (-1) et sont éloignés de 1 (-1) d'une distance strictement inférieure à $1/2$. Ainsi, $[a, b]$ est libre. Ensuite,

$$W = \{(\theta t, \varphi) \in G_\theta : \ |\theta t| \leq 1, |\varphi| \leq 1\}$$

est un voisinage compact de e, tel que si $s \in a[a, b]$ et $t \in b[a, b]$,

$$sW \subset \mathbb{R} \times \{z : \ |z - 1| < 1/2\} \qquad tW \subset \mathbb{R} \times \{z : \ |z + 1| < 1/2\}$$

et donc $sW \cup tW = \emptyset$. □

Lemme 59 *Soit G_θ un groupe de Lie tel que défini dans* (2.4) *ou* (2.5). *Alors, si G_θ est un sous-groupe immergé connexe d'un groupe de Lie G, alors G_θ est un sous-groupe de Lie.*

Démonstration. On rappelle que cette propriété n'est pas automatique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. On considère le groupe de Lie $H = S^1 \times S^1$ et le morphisme de groupes $\psi_\alpha : \mathbb{R} \to S^1 \times S^1, t \mapsto (\exp it, \exp i\alpha t)$. Alors, $\psi_\alpha(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie immergé connexe de H, mais pas un sous-groupe de Lie car ce n'est pas une sous-variété.

On veut montrer que G_θ est fermé dans G. Pour cela, on montre que si $t \mapsto f(t)$ est un sous-groupe à un paramètre de G_θ, alors la fermeture de $f(\mathbb{R})$ est contenue dans G_θ. On suppose qu'une suite $f(t_n)$ tend dans G vers $g \in G$. Si $g \notin f(\mathbb{R})$ alors forcément $|t_n|$ tend vers l'infini car $\{f(t) : \ |t| \leq M\}$ est fermé dans G_θ. On va s'aider de la représentation adjointe. Par exemple, si $\theta \notin \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_\theta}\begin{pmatrix} \exp(t\theta) & \varphi_1 + i\varphi_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varphi_2\theta_2 - \varphi_1\theta_1 & \exp(t\theta) & 0 \\ \varphi_2\theta_1 + \varphi_1\theta_2 & 0 & \exp(t\theta) \end{pmatrix}$$

Si $|t_n| \to \infty$, $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_\theta} f(t_n)$ ne converge pas dans $GL(\mathfrak{g}_\theta)$, et $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} f(t_n)$ non plus dans $GL(\mathfrak{g})$. Or si $f(t_n)$ tend vers $\mathfrak{g}$ dans G, alors $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} f(t_n)$ tend vers $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g)$ dans $GL(\mathfrak{g})$. □

Lemme 60 *Soit G un groupe de Lie, connexe, simplement connexe, de type R et résoluble. Alors G est à croissance polynomiale.*

Démonstration. C'est dans ce lemme qu'apparaît la croissance polynomiale des groupes de type R.

On procède par récurrence sur la dimension de G. Si sa dimension est 1, G s'identifie à $\mathbb{R}$, et la conclusion est établie.

On suppose la propriété établie pour les groupes de dimension inférieure à d. Soit G de dimension $d+1$. Comme G est connexe, simplement connexe et résoluble, un élément g de G s'écrit sous forme de coordonnées du second type (le principe est de partir d'une suite normale de $\mathfrak{g}$ [Kna02])

$$g = \exp(t_1 X_1) \ldots \exp(t_{d+1} X_{d+1}), \quad t_1, \ldots, t_{d+1} \in \mathbb{R},$$

$X_1, \ldots, X_{d+1}$ étant des éléments fixes de $\mathfrak{g}$. De plus,

$$G_d = \{\exp(t_2 X_2) \ldots \exp(t_{d+1} X_{d+1}) : \ t_2, \ldots, t_{d+1} \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-groupe distingué de G, qui est connexe, simplement connexe et résoluble. Alors, l'algèbre de Lie de G_d notée $\mathfrak{g}_d$ est stable par $\mathrm{Ad}(\exp(tX_1))$ pour tout t réel. Ensuite, il existe un polynôme p_d de degré inférieur à d et croissant sur $\mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ ||\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\exp(tX_1))|| \leq p_d(t)$$

En effet, on écrit $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_1) = D + N$, où D diagonalisable (de valeurs propres imaginaires pures car G est de type R) et N nilpotent commutent. Alors,

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\exp(tX_1)) = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(tX_1)) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(tD)\left(1 + tN + \ldots + \frac{t^d N^d}{d!}\right)$$

En passant en norme, comme $|| \exp(tD)||$ est inférieure à une certaine constante, on voit apparaître le polynôme de degré d. On pose pour t réel : $h_1(t) = \exp(tX_1)$, et

$$W = \{Y \in \mathfrak{g}_d : \ ||Y|| \leq 1\}, \qquad K = \exp W, \quad \text{et} \quad K_0 = \{h_1(t)K : \ |t| \leq 1\}$$

K_0 est un voisinage compact de l'identité dans G et l'engendre. Alors,

$$\begin{aligned} K_0^n &= \{h_1(t_1)V \dots h_1(t_n)V : \ |t_i| \leq 1, \ 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{h_1(t_1 + \dots + t_n) \exp(\mathbf{Ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1(-t_2 - \dots - t_n)W) \dots \exp(\mathbf{Ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1(-t_n)W) \exp(W) : \\ &\qquad\qquad |t_i| \leq 1, \ 1 \leq i \leq n\}\} \\ &\subset \{h_1(t) \exp(p_d(n-1)W) \dots \exp(p_d(1)W) \exp(W) : \ |t| \leq n\} \\ &= \{h_1(t) \exp((p_d(n-1) + \dots + p_d(1) + 1)W) : \ |t| \leq n\} \\ &= \{h_1(t) K^{p_d(n-1)+\dots+p_d(1)+1} : \ |t| \leq n\} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nu_G(K_0^n) \leq 2n\, \nu_{G_d}(K^{p_d(n-1)+\dots+p_d(1)+1})$$

Par hypothèse de récurrence, le terme de droite croît polynomialement en n, ce qui conclut.
□

Chapitre III

Moyennabilité et groupes de Lie réels semi-simples connexes à centre fini

Pour montrer que les groupes de Lie réels semi-simples connexes à centre fini possèdent la propriété DR, on va s'appuyer sur une caractérisation des groupes moyennables possédant la propriété DR. On pourra alors conclure en utilisant la décomposition d'IWASAWA et une estimation de la fonction sphérique élémentaire.

1 Propriété DR et moyennabilité

Pour les groupes moyennables, la propriété DR est en fait équivalente à une croissance polynomiale.

Théorème 61 [CPS07] *Soit G un groupe localement compact, engendré par un compact (on note ℓ la longueur associée) et moyennable. On note ν une mesure de* HAAR *sur G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe un polynôme P tel que $\nu(B_\ell(r)) \leq P(r)$ pour tout $r \geq 0$;*
2. *(G, ℓ) a la propriété DR ;*
3. *(G, ℓ) a la propriété DR$_{rad}$, c'est-à-dire pour l'espace des fonctions radiales sur G (fonctions telles que si $x, y \in G$ vérifient $\ell(x) = \ell(y)$ alors $f(x) = f(y)$) et de carré sommable.*

Démonstration. On part de 1. Soient $r \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}_c(G)$ une fonction positive à support compact inclus dans $B_\ell(r)$. G est moyennable, donc par la propriété 25 et par inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} = ||f||_1 \leq \sqrt{\nu(B_\ell(r))}||f||_2$$

Cela établit la propriété DR. Ensuite, on établit facilement le résultat pour les fonctions réelles, puis complexes.

Établissons ensuite que 3. implique 1. Soit la fonction radiale à support compact $f = \mathbf{1}_{B_\ell(r)}$. La propriété $\mathrm{DR}_{\mathrm{rad}}$ et la moyennabilité de G donnent

$$\nu(B_\ell(r)) = ||f||_1 = ||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq P(r)||f||_2 = P(r)\sqrt{\nu(B_\ell(r))}$$

On conclut alors que $\nu(B_\ell(r))$ soit nul ou non. $\square$

Contre-exemple 62 Le sous-groupe Sol de $GL_3(\mathbb{R})$ est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \exp t & 0 & u \\ 0 & \exp(-t) & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $u, v, t \in \mathbb{R}$, et s'identifie à un produit semi-direct de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}$, avec la loi

$$((u,v),t).((u',v'),t') = (u + \exp(t)u', v + \exp(-t)v', t + t')$$

Sol est moyennable car résoluble. Il n'est pas de type R (l'algèbre de Lie est de dimension 3 et une base (U, V, T) vérifie $[T, U] = U$, $[T, V] = -V$ et $[U, V] = 0$), donc est à croissance exponentielle (théorème 55). Il ne possède donc pas la propriété DR (théorème 61). C'est le groupe de Lie unimodulaire de plus petite dimension qui ne possède pas la propriété DR.

La version discrète de ce cas est le sous-groupe de $SL_3(\mathbb{Z})$ formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n & \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

où $n, u, v \in \mathbb{Z}$, qui s'identifie avec le produit semi-direct de $\mathbb{Z}^2$ par $\mathbb{Z}$, avec

$$((u,v),n).((u',v'),n') = ((u,v) + A^n(u',v'), n + n'),$$

où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Ce sous-groupe est aussi résoluble et à croissance exponentielle. Il ne possède donc pas la propriété DR. On en déduit alors que $SL_3(\mathbb{Z})$ ne possède pas non plus la propriété DR par le théorème 14.

Corollaire 63 *Soit G un groupe localement compact et engendré par un compact, à croissance polynomiale. Alors G possède la propriété DR.*

Démonstration. En effet, un tel groupe est moyennable (théorème 44). Le théorème précédent 61 permet de conclure. $\square$

La situation est donc claire pour les groupes moyennables engendrés par des compacts : ils possèdent la propriété DR si et seulement s'il sont à croissance polynomiale. De plus, la croissance polynomiale est une condition suffisante pour posséder la propriété DR pour les groupes engendrés par des compacts. Il reste à considérer les groupes non moyennables et à croissance non polynomiale. Rien n'empêche qu'ils possèdent la propriété DR, comme par exemple $SL_n(\mathbb{R})$ (la propriété DR de ce dernier cas une conséquence du théorème 101).

2 Propriété DR sur les groupes du type $G = PK$

On considère dans toute cette partie un groupe unimodulaire G tel que $G = PK$, où K est un sous-groupe compact et P un sous-groupe fermé et moyennable. Les résultats constitueront une première approche pour les groupes de Lie. En effet, sur un groupe de Lie réel semi-simple (non compact) connexe et de centre fini, la décomposition d'IWASAWA (théorème 73) donne $G = NAK$, avec K compact et NA fermé résoluble donc moyennable.

Les fonctions invariantes par action de K à gauche ou à droite, voire les deux vont jouer un rôle particulier.

Définition 64 *Soit G un groupe localement compact et K un sous-groupe de G. On dit qu'une fonction f définie sur G est K-bi-invariante (resp. K-invariante à gauche, resp. à droite) si pour tout $x \in G$, tous $k, k' \in K$,*

$$f(kxk') = f(x) \quad (\textit{resp. } f(kx) = f(x), \quad \textit{resp. } f(xk) = f(x))$$

Lemme 65 *Soit G un groupe localement compact et K un sous-groupe compact. Soit $f \in \mathcal{C}_c(G)$. On pose*

$$f_K(x) = \sqrt{\int_K |f(xk)|^2\, dk} \qquad {}_Kf(x) = \sqrt{\int_K |f(kx)|^2\, dk}$$

$${}_Kf_K(x) = \sqrt{\int_K dk \int_K dk'\, |f(kxk')|^2}$$

Alors, f_K (${}_Kf$) est K-invariante à droite (gauche), ${}_Kf_K$ K-bi-invariante, f_K, ${}_Kf$ et ${}_Kf_K$ sont de carré sommable sur G, et vérifient

$$||f_K||_2 = ||{}_Kf||_2 = ||{}_Kf_K||_2 = ||f||_2 \qquad ||\lambda(f)||_{2\to2} \leq ||\lambda(f_K)||_{2\to2}$$

$$||\lambda(f)||_{2\to2} \leq ||\lambda({}_Kf)||_{2\to2} \qquad ||\lambda(f)||_{2\to2} \leq ||\lambda({}_Kf_K)||_{2\to2}$$

ainsi que les mêmes inégalités en remplaçant la convolution à gauche λ par celle à droite ρ.

Démonstration. L'égalité des normes $||.||_2$ de f et de ses moyennes s'obtient sans difficulté dès qu'on a remarqué que $\Delta(k) = 1$ pour tout $k \in K$, en notant Δ le module de G.

Soit $g \in L^2(G)$, $x \in G$ et $k \in K$, alors

$$f \star g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})\, dy = \int_G f(xyk)g(k^{-1}y^{-1})\, dy$$

Par conséquent,

$$|f\star g(x)| \leq \int_K \int_G |f(xyk)g(k^{-1}y^{-1})|\, dk\, dx \leq \int_G \sqrt{\int_K |f(xyk)|^2\, dk} \sqrt{\int_K |g(k^{-1}y^{-1})|^2\, dk\, dx}$$

Ce dernier terme s'identifiant à $f_K \star {}_K g(x)$, on déduit $||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq ||\lambda(f_K)||_{2\to 2}$.

On remarque ensuite que $(f^*)_K = ({}_K f)^*$ (où f^* est l'image de f par l'isométrie (1.1) de $L^1(G)$), donc, en notant $\lambda(f)^*$ est l'adjoint de $\lambda(f)$,

$$\begin{aligned} ||\lambda(f)||_{2\to 2} = ||\lambda(f)^*||_{2\to 2} = ||\lambda(f^*)||_{2\to 2} \quad &\leq ||\lambda((f^*)_K)||_{2\to 2} = ||\lambda(({}_K f)^*)||_{2\to 2} \\ &= ||\lambda({}_K f)^*||_{2\to 2} = ||\lambda({}_K f)||_{2\to 2} \end{aligned}$$

ce qui conclut pour les convolutions à gauche.

Vu les relations $\rho(f) = \imath \circ \lambda(\imath(f)) \circ \imath$ (expression (1.3), on rappelle que $\imath$ est une involution de $L^2(G)$), $\lambda(f)^* = \lambda(f^*)$ et $(\imath(f)^*)_K = \imath(f_K)^*$, pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$ et $g \in L^2(G)$,

$$||\rho(f)||_{2\to 2} = ||\lambda(\imath(f))||_{2\to 2} = ||\lambda(\imath(f)^*)||_{2\to 2} \leq ||\lambda((\imath(f)^*)_K)||_{2\to 2} = ||\lambda(\imath(f_K)^*)||_{2\to 2}$$

d'où

$$||\rho(f)||_{2\to 2} \leq ||\lambda(\imath(f_K))||_{2\to 2} = ||\rho(f_K))||_{2\to 2}$$

Il suffit donc de s'intéresser aux inégalités concernant les convolutions à gauche. $\square$

Pour continuer, on va utiliser des notions concernant des opérateurs sur des espaces homogènes. Soit X un espace homogène (voir la définition 26 pour les hypothèses associées), de groupe associé G, avec des stabiliseurs compacts. On fixe $x_0 \in X$ tel que le stabilisateur de x_0 soit K. Alors on peut identifier X à G/K. Soit p un noyau positif sur $X \times X$ intégrable et G-invariant, c'est-à-dire tel que

$$\forall x, y \in X,\ \forall g \in G,\ p(g.x, g.y) = p(x, y)$$

On va associer les fonctions continues à support compact sur G et X. Pour cela, à $x \in X$, on associe un élément $g_x \in G$ tel que $g_x.x_0 = x$. On définit alors les opérateurs

$$S : \begin{array}{l} \mathcal{C}_c(G) \to \mathcal{C}_c(X) \\ f \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_K f(g_x k)\, dk\right) \end{array} \qquad T : \begin{array}{l} \mathcal{C}_c(X) \to \mathcal{C}_c(G) \\ f \mapsto (g \mapsto f(g.x_0)) \end{array}$$

(S est effectivement bien défini car on s'affranchit du choix arbitraire de g_x en intégrant sur K). On vérifie que les opérateurs sont bien à valeurs dans les espaces désirés : pour S, c'est le théorème 27 et pour T, la vérification est élémentaire.

On va similairement associer une convolution à droite sur G à un opérateur sur X. Soit l'application $\psi : G \to \mathbb{R}^+$ par

$$\psi(g) = p(g.x_0, x_0) \text{ pour } x \in G$$

La G-invariance de p rend ψ K-bi-invariante. On définit finalement l'opérateur P :

$$P : \begin{array}{l} L^2(X) \to L^2(X) \\ f \mapsto \displaystyle\int_X p(x, y) f(y)\, dy \end{array}$$

Lemme 66 *Avec les notations précédentes, S et T agissent entre les espaces $L^2(G)$ et $L^2(X)$ sans augmenter les normes, et $\rho(\psi) = TPS$ ainsi que $P = S\rho(\psi)T$. En particulier,*

$$||P||_{2\to 2} = ||\rho(\psi)||_{2\to 2}$$

Ce dernier résultat ne dépend notamment pas du choix du groupe G opérant sur X.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_c(X)$. Alors,

$$\begin{aligned} ||Tf||_{2,G}^2 &= \int_G dg\, f(g.x_0)^2 = \int_{G/K} d(gK) \int_K dk\, f(gk.x_0)^2 \\ &= \int_{G/K} d(gK) \int_K dk\, f(g.x_0)^2 = \int_X dx\, f(x)^2 = ||f||_{2,X}^2 \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c(G)$. Alors

$$\begin{aligned} ||Sf||_{2,X}^2 = \int_X dx S(f)(x)^2 = \int_X dx \left(\int_K f(g_x k)\, dk \right)^2 &\leq \int_X dx \int_K f(g_x k)^2\, dk \\ &= \int_G f(g)^2\, dg = ||f||_{2,G}^2 \end{aligned}$$

On va montrer par exemple l'expression $\rho(\psi) = TPS$. L'autre cas est très similaire. Soit $f \in \mathcal{C}_c(G)$ et $x \in X$, $g_x \in X$ tel que $g_x.x_0 = x$. Alors, $Sf(x) = \int_K f(g_x k)\, dk$. Puis,

$$P(Sf)(x) = \int_X dy\, p(x,y) \int_K dk\, f(g_y k) = \int_X dy\, p(x, g_y k.x_0) \int_K dk\, f(g_y k)$$

et

$$\begin{aligned} T(P(Sf))(g) &= \int_X dy\, p(g.x_0, g_y k.x_0) \int_K dk\, f(g_y k) = \int_G p(g.x_0, g'.x_0) f(g')\, dg' \\ &= \int_G p(x_0, g'.x_0) f(gg')\, dg' = \int_G \frac{p(g'.x_0, x_0) f(gg'^{-1})}{\Delta(g')}\, dg' = \rho(\psi)(f)(g) \end{aligned}$$

Le dernier résultat se déduit des précédents. Soit $f \in \mathcal{C}_c(G)$. Alors,

$$||\rho(\psi)(f)||_{2,G} = ||TPS(f)||_{2,G} \leq ||PS(f)||_{2,X} \leq ||P||_{2\to 2} ||Sf||_{2,X} \leq ||P||_{2\to 2} ||f||_{2,G}$$

d'où $||\rho(\psi)||_{2\to 2} \leq ||P||_{2\to 2}$. On obtient similairement l'inégalité inverse. $\square$

Lemme 67 [CPS07] *Soit G un groupe localement compact unidmodulaire tel que $G = PK$, où P est un sous-groupe fermé moyennable et K un sous-groupe compact.*

Soit f une fonction positive et intégrable sur G. On la suppose de plus K-bi-invariante. Soit f_P sa restriction à P. Alors,

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} = \int_P \frac{1}{\sqrt{\Delta_P(u)}} f_P(u) du,$$

où Δ_P est le module du groupe P.

Démonstration. Soit l'espace homogène $X = G/K$ et f telle que dans l'énoncé. On définit le noyau positif p sur $X \times X$ par $p(xK, yK) = f(y^{-1}x)$. Cette définition a un sens vu la K-bi-invariance de f. Alors, les groupes G et P agissent sur X et les actions de G et P laissent le noyau invariant.

D'après le théorème 66,

$$||\rho(f)||_{2\to 2} = ||\rho_P(f_P)||_{2\to 2},$$

où ρ_P est la convolution à droite dans P. Comme G est unimodulaire,

$$||\rho(f)||_{2\to 2} = ||\lambda(f)||_{2\to 2}$$

La moyennabilité de P donne (théorème 25)

$$||\rho_P(f_P)||_{2\to 2} = \int_P \frac{f_P(y)}{\sqrt{\Delta_P(y)}} dy$$

ce qui conclut. □

Définition 68 *Soit G un groupe unimodulaire, localement compact, engendré par un compact, possédant deux sous-groupes fermés P et K tels que $G = PK$, avec K compact et P moyennable.*

On définit pour $x \in G$ la fonction

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_P(p)}}, \tag{3.1}$$

où $x = pk$, avec $p \in P$, $k \in K$ et Δ_P est le module de P.

Alors, on pose

$$\phi_0(x) = \int_K \phi(kx) dk \tag{3.2}$$

ϕ_0 *est appelée* fonction sphérique élémentaire (fonction de HARISH-CHANDRA).

Dans cette définition, ϕ est bien définie et ne dépend pas de la décomposition de x choisie car $\Delta_P \equiv 1$ sur $K \cap P$. ϕ_0 est alors K-bi-invariante.

En fait, le cadre naturel des fonctions sphériques est celui des des groupes de Lie. Si G est un groupe de Lie connexe et K un sous-groupe compact, on appelle *fonction sphérique* sur G une fonction K-bi-invariante, valant 1 en l'élément neutre et fonction propre des opérateurs différentiels sur G invariants à gauche (par G) et à droite par K [Hel84]. Notamment, HARISH-CHANDRA a montré qu'elles étaient alors toutes de la forme (3.6) pour un groupe de Lie réel semi-simple (non compact) connexe à centre fini. On montrera plus tard qu'on retrouve bien ainsi la fonction définie ici par (3.2).

Lemme 69 [CPS07] *Soit f une fonction positive intégrable sur G et K-bi-invariante. Alors*

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} = \int_G \phi_0(x) f(x)\, dx$$

Démonstration. On utilise le lemme 67, avec la K-bi-invariance de f :

$$\begin{aligned}||\lambda_G(f)||_{2\to 2} &= \int_P \frac{1}{\sqrt{\Delta_P(p)}} f_P(p)\, dp = \int_P \left(\int_K \frac{1}{\sqrt{\Delta_P(pk)}} f_P(pk) dk \right) dp \\ &= \int_G \phi(x) f(x) dx = \int_G \phi(k_0 x) f(x)\, dx,\end{aligned}$$

avec k_0 un élément quelconque de K. On intègre alors sur K (par rapport à k_0) les premier et dernier termes, ce qui conclut. □

Théorème 70 [CPS07] *Soit G un groupe unimodulaire, localement compact, engendré par un compact, possédant deux sous-groupes fermés P et K tels que $G = PK$, avec K compact et P moyennable. Alors G a la propriété DR si et seulement s'il existe un polynôme P tel que pour tout $r \geq 0$,*

$$\int_G \phi_0^2(x) \mathbf{1}_{B_\ell(r)}(x) dx \leq P(r) \tag{3.3}$$

Démonstration. On note ℓ une longueur de mots.

Supposons tout d'abord la propriété d'inégalité (3.3) vérifiée. On pose $r \geq 0$. Soit $f \in L^2(G)$ positive, K-bi-invariante et de support inclus dans $B_\ell(r)$. Par le lemme 69,

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} = \int_G \phi_0(x) f(x)\, dx \leq ||\phi_0 \mathbf{1}_{B_\ell(r)}||_2 ||f||_2 \leq P(r) ||f||_2$$

L'inégalité est toujours vérifiée, même si f n'est pas K-bi-invariante par le lemme 65. Enfin, on établit facilement la propriété même si f n'est pas positive, mais à valeurs complexes. Ainsi, G possède la propriété DR.

Réciproquement, soit G possédant la propriété DR. On pose pour tout $x \in G$:

$$\tilde{\ell}(x) = \int_K dk \int_K dk' \; \ell(kxk')$$

et soit $M = \sup_K \ell$. Or, pour $r > 2M$,

$$B_\ell(r - 2M) \subset \tilde{l}^{-1}([0, r]) \subset B_\ell(r + 2M)$$

Comme la fonction $f = \phi_0 \mathbf{1}_{B_{\tilde{\ell}^{-1}[0,r]}}$ est K-bi-invariante, à support compact, d'après le lemme 69,

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} = \int_G \phi_0(x) f(x)\, dx$$

On conclut alors en appliquant la propriété DR de G à f : il existe un polynôme P tel que

$$||\lambda(f)||_{2\to 2} \leq P(r) ||f||_2 = P(r) \sqrt{\int_G \phi_0(x)^2 \mathbf{1}_{B_{\tilde{\ell}^{-1}[0,r]}}(x) dx}$$

Dès que r assez grand et $\nu(B_{\tilde{\ell}^{-1}[0,r]}) > 0$,

$$\int_G \phi_0^2(x)\mathbf{1}_{B_{\tilde{\ell}^{-1}[0,r]}}(x)dx \leq P(r),$$

ce qui établit la propriété voulue. □

3 Application aux groupes de Lie réels semi-simples connexes de centre fini

Avant de poursuivre, on va commencer par rappeler les principales étapes concernant la structure des groupes de Lie réels semi-simples connexes.

Soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe (non compact). On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G sur laquelle on considère une involution de CARTAN θ. La forme bilinéaire

$$(X, Y) = -B(X, \theta(Y)) \quad \text{pour } X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{3.4}$$

où B est la forme de KILLING, est définie positive. On considérera alors G muni de la métrique définie par $(.,.)$ et invariante à gauche comme variété riemanienne. On pose notamment pour $X \in \mathfrak{g}$

$$|X| = \sqrt{(X, X)}$$

Sous l'action de θ, $\mathfrak{g}$ se décompose en sous-espaces propres : $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{l}$ $(\mathfrak{p})$ est le sous-espace associé à la valeur propre $+1$ (-1). On rappelle que les éléments de $\mathfrak{l}$ $(\mathfrak{p})$ sont diagonalisables à valeurs propres imaginaires pures (réelles) quand on considère la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

Théorème 71 (décomposition de Cartan) [Kna02] *Soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe (non compact) de centre fini, avec les notations précédentes. On note K le sous-groupe de G immergé connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$. Alors,*

- *l'application $K \times \mathfrak{p} \to G$, $(k, X) \mapsto k\exp(X)$ est un difféomorphisme ;*
- *K est fermé et contient le centre de G ;*
- *si le centre de G est fini, K est compact et est un sous-groupe compact maximal de G.*

On fixe alors un sous-espace de CARTAN $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire une sous-algèbre maximale de $\mathfrak{g}$, abélienne et contenue dans $\mathfrak{p}$. On décompose l'algèbre $\mathfrak{g}$ pour l'action adjointe de $\mathfrak{a}$. Pour $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, on note les espaces de poids

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \ \forall H \in \mathfrak{a}, \ \mathrm{ad}\, H(X) = [H, X] = \alpha(H)X\}$$

On note $m_\alpha = \dim\, \mathfrak{g}_\alpha$ la dimension du sous-espace correspondant. On considère l'ensemble fini noté Σ des formes linéaires α sur $\mathfrak{a}$ telles que $\mathfrak{g}_\alpha$ ne soit pas réduit à 0. Σ est un *système réduit de racines* de $\mathfrak{g}$ (pas forcément restreint). On choisit alors un ordre sur les racines, comme l'ordre lexicographique (on fixe une base de $\mathfrak{a}^*$, qu'on ordonne arbitrairement ; les racines positives sont celles dont la première coordonnée non nulle est positive). L'ensemble des racines positives est noté Σ^+. On notera que si $\alpha \in \Sigma$, en utilisant l'involution de CARTAN, forcément $-\alpha \in \Sigma$ avec un espace de poids de même dimension. Les seules autres racines multiples sont au mieux $\pm 2\alpha$ et $\pm\frac{1}{2}\alpha$ (voir [Kna02]). Les racines α telles que $\alpha/2$ ne soit pas racines se nomment *racines indivisibles*. L'ensemble des racines positives indivisibles est noté Σ_0^+ et son cardinal d. Parmi les racines positives, on distingue les *racines simples*, qui ne peuvent pas s'écrire comme somme de racines positives. On appelle Π leur ensemble. On montre que Π forme une base de $\mathfrak{a}^*$. Le nombre de racines simples se note $l = \dim \mathfrak{a}$ et est appelé *rang réel* de G. Comme usuellement, on définit le groupe W de WEYL sur le système de racines comme le groupe engendré par les réflexions par rapport à l'une des racines [Kna02].

Une fois l'ordre fixé sur $\mathfrak{a}^*$, on définit la chambre de WEYL positive sur $\mathfrak{a}$ par

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \ \forall \alpha \in \Sigma, \ \alpha(H) > 0\}$$

On pose alors $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$. On remarquera notamment $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. Le vecteur suivant de $\mathfrak{a}^*$ joue un rôle important en analyse sur les groupes de Lie : on note

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha$$

On énonce alors les décompositions polaire et d'IWASAWA.

Théorème 72 (décomposition polaire) *Avec les notations précédentes, G se décompose comme $G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}^+})K$. En fait, tout $x \in G$ s'écrit $x = k_1(\exp H)k_2$, où $k_1, k_2 \in K$ et $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$. H est uniquement déterminé par x.*

Démonstration. À partir de la décomposition de CARTAN, il suffit de montrer $\exp \mathfrak{s} \subset K(\exp \overline{\mathfrak{a}^+})K$ pour obtenir l'existence de la décomposition polaire. Cette inclusion a pour origine $\mathfrak{s} = \cup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} = \cup_{w \in W} w.\overline{\mathfrak{a}^+}$. Le premier point est dû au fait que les sous-espaces de CARTAN sont conjugués par l'action adjointe de K (on rappelle que tout élément de $\mathfrak{s}$ fait partie d'un sous-espace de CARTAN), et le second au fait que le groupe de WEYL agit transitivement sur les chambres de WEYL [Kna02]. On se reportera à [Kna02] pour l'unicité. □

Théorème 73 (décomposition d'IWASAWA) [Kna02] *Avec les notations précédentes, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose selon*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

On appelle alors K (resp. A, N) le sous-groupe de G immergé connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ (resp. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$). K est un sous-groupe fermé (compact si le centre de G est fini), A et N sont simplement connexes et $S = NA$ est fermé et résoluble. De plus, l'application $K \times A \times N \to G$, $(k, a, n) \mapsto kan$ est un difféomorphisme.

Avant de continuer, considérons un exemple simple : $G = SL_n(\mathbb{R})$. On peut prendre comme involution de CARTAN $\theta(X) = -{}^tX$. Alors $\mathfrak{g}$ est constitué des matrices de trace nulle, $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ des antisymétriques et $\mathfrak{p}$ des symétriques. $\mathfrak{a}$ est composé des matrices diagonales (de trace nulle), et les racines sont $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$. Les espaces de poids sont alors tous de dimension 1. Alors, $K = SO(n)$, A est constitué des matrices diagonales de déterminant unité et N des matrices triangulaires supérieures unipotentes.

Une inégalité va être utile pour les estimations qui vont suivre.

Lemme 74 *Soit une racine $\alpha \in \Sigma$ et $H \in \mathfrak{a}$. Alors $|\langle \alpha, H\rangle| = |\alpha(H)| \leq |H|$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \Sigma$. Par définition,

$$|H|^2 = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, H \circ \mathrm{ad}\, H) = 2 \sum_{\alpha' \in \Sigma^+} m_{\alpha'} \alpha'(H)^2 \geq 2\alpha(H)^2$$

en évaluant la trace dans la base formée de $\mathfrak{a}$ et en considérant des bases des $(\mathfrak{g}_{\alpha'})_{\alpha' \in \Sigma}$. □

Théorème 75 (estimation de la fonction sphérique élémentaire) *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe de centre fini, de décomposition d'*IWASAWA *$G = (NA)K$. On utilise les notations précédentes. La fonction sphérique élémentaire satisfait, pour $H \in \mathfrak{a}^+$, à*

$$\phi_0(\exp H) \leq C(1 + |H|)^d \exp\left(-\rho(H)\right),$$

où d est le nombre de racines positives indivisibles et C une constante.

Démonstration. Ce résultat est dû à HARISH-CHANDRA en 1958.

On prend comme définition de la fonction sphérique élémentaire celle non usuelle mais apparaissant dans ce qui précède (expression (3.2)). La première chose à faire est d'évaluer le module de $S = NA$: pour $n \in N$ et $H \in \mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned}\Delta_{NA}(n \exp(H)) &= \mathrm{Det}_{\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(n \exp(H)))^{-1} = \mathrm{Det}(\mathrm{Ad}(n))^{-1}\mathrm{Det}(\mathrm{Ad}(\exp(H)))^{-1} \\ &= 1. \exp(-\sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha(H))\end{aligned}$$

en utilisant une base de $\mathfrak{n}$ choisie dans les $\mathfrak{g}_\alpha$. Au final,

$$\Delta_{NA}(na) = \Delta_{NA}(na) = \exp(-2\rho(\ln\, a))$$

Pour $g \in G$, on note les compositions d'IWASAWA de la manière suivante :

$$g = \tilde{n}'(g) \exp \tilde{A}(g)\tilde{u}(g) \text{ pour NAK et } g = \tilde{k}(g) \exp \tilde{H}(g)\tilde{n}(g) \text{ pour KAN.}$$

Ainsi, d'après les expressions (3.1) et (3.2),

$$\phi_0(g) = \int_K \exp(\rho(\tilde{A}(kg)))\, dk = \int_K \exp(-\rho(\tilde{H}(g^{-1}k)))\, dk$$

car $\tilde{A}(x) = -\tilde{H}(x^{-1})$ pour $x \in G$. En développant $gg^{-1}k = k$,

$$\begin{aligned} k &= g\tilde{k}(g^{-1}k)\ \exp(\tilde{H}(g^{-1}k))\,\tilde{n}(g^{-1}K) \\ &= \tilde{k}(g\tilde{k}(g^{-1}k))\ \exp\tilde{H}(g\tilde{k}(g^{-1}k))\,\tilde{n}(g\tilde{k}(g^{-1}k))\ \exp(\tilde{H}(g^{-1}k))\,\tilde{n}(g^{-1}k) \end{aligned}$$

On rappelle que $aNa^{-1} \subset N$ pour $a \in A$, d'où $\tilde{H}(g^{-1}k) = -H(g\tilde{k}(g^{-1}k))$. D'après le lemme 76 appliqué à $f(k) = \exp(\rho(\tilde{H}(gk)))$, on déduit l'expression usuelle de la fonction sphérique élémentaire

$$\phi_0(g) = \int_K \exp(-\rho(\tilde{H}(gk)))\,dk$$

Alors, si $a \in A$, $b \in \overline{A^+}$ (A^+ est constitué des éléments de A dont le logarithme appartient à $\mathfrak{a}^+$) et $k \in K$,

$$\tilde{H}(abk) = \tilde{H}(a\tilde{k}(bk)) + \tilde{H}(bk)$$

On déduit de la formule (3.7) du lemme 76 avec $x = b$

$$\phi_0(a) = \int_K \exp(-\rho(\tilde{H}(abk)))\ \exp(-\rho(\tilde{H}(bk)))\,dk$$

En considérant la représentation de plus haut poids ρ, on établit $|\rho(\tilde{H}(bk))| \leq \rho(\ln b)$ pour $b \in \overline{A^+}$ [GaV88]. On s'affranchit du terme exponentiel global en définissant

$$\psi(a) = \exp(\rho(\ln a))\phi_0(a) \quad \text{pour } a \in A$$

et ainsi

$$\psi(a) \leq \psi(ab) \quad \text{pour } a \in A, b \in \overline{A^+} \tag{3.5}$$

Cela va permettre de s'écarter des parois de la chambre de WEYL par un choix convenable de b.

On donne ensuite les grandes étapes menant au résultat (pour davantage de détails, on consultera [Hel84]). Le développement de HARISH-CHANDRA des fonctions sphériques donne pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ ($\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de $\mathfrak{a}^*$) et $H \in \mathfrak{a}^+$,

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(\exp(H)) &= \int_K \exp((i\lambda - \rho)(\tilde{H}(gk)))\,dk \\ &= \sum_{w \in W} c(w.\lambda)\exp((iw.\lambda - \rho)(H)) \sum_{\mu \in \Lambda} \gamma_\mu(w.\lambda)\exp(-\mu(H)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

où Λ est le réseau des racines positives

$$\Lambda = \mathbb{N}\alpha_1 + \ldots + \mathbb{N}\alpha_l,$$

et $c(\lambda)$ la fonction de HARISH-CHANDRA. Le résultat final provient du fait que c est méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, avec un pôle en 0, alors que $b = \pi c$ est holomorphe, avec $b(0) \neq 0$, pour

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} \langle \alpha, \lambda \rangle$$

(π est un polynôme de degré d par rapport aux coordonnées de λ dans une base de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$). On remarque alors, si $\partial(\pi)$ est l'opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ associé au polynôme π,

$$\phi_0 = C_0\{\partial(\pi)[\pi(\lambda)\phi_\lambda]\}_{\lambda=0},$$

où C_0 est une constante. On choisit $H_0 \in \mathfrak{a}^*$ tel que $\alpha(H_0) = 1$ pour toute racine indivisible α (loin des murs). On reporte tout cela dans le développement (3.6) de HARISH-CHANDRA de ϕ_λ :

$$\phi_0(\exp tH_0) = C_0 \sum_{\mu\in\Lambda} p_\mu(t)\exp(-t(\rho+\mu)(H_0)),$$

où p_μ est un polynôme de degré d et $t \in \mathbb{R}_+^*$. En effet, les dérivations de degré d engendrent des termes en t^d. Alors,

$$F(t) = \phi_0(\exp tH_0) = C_0 \sum_{\mu\in\Lambda} p_\mu(t)\exp(-t\mu(H_0))$$

vérifie

$$|F(t)| \leq C(1+t)^d \quad \text{pour } t \geq 0$$

où C est une constante. Si $H \in \mathfrak{a}^+$, on définit $\beta(H) = \max_{1\leq i\leq d}\langle \alpha_i, H\rangle$. Alors, $\beta(H)H_0 - H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$, et d'après (3.5),

$$\psi(\exp H) \leq \psi(\exp(\beta(H)H_0)) = F(\beta(H)) \leq C(1+\beta(H))^d$$

On conclut, en utilisant le lemme 74,

$$\phi_0(\exp H) \leq C\exp(-\rho(H))(1+|H|)^d$$

En fait, ce genre d'estimation est même optimal dans le sens où il existe une minoration par un terme similaire [Ank87]. □

Lemme 76 *Soit $f \in \mathcal{C}_c(K)$, alors pour $x \in G$,*

$$I = \int_K f(\tilde{k}(x^{-1}k))\,dk = \int_K f(k)\exp(-2\rho(\tilde{H}(xk)))\,dk$$

Démonstration. Soit $x \in G$ et $f \in \mathcal{C}_c(G)$. Soit $x \in G$, alors

$$\int_G f(g)\,dg = \int_G f(xg)\,dg = \int_K\int_A\int_N f(xkan)\exp(2\rho(\ln\, a))dk\,da\,dn$$

(cette intégration sous forme KAN dans un groupe semi-simple est classique, voir [Kna02] ou [Hel84]). Alors,

$$xkan = \tilde{k}(xh)\exp\tilde{H}(xk)\tilde{n}(xk)an = \tilde{k}(xh)\exp\tilde{H}(xk)a((a^{-1}\tilde{n}(xk)a)n) = k_1a_1n_1$$

Le changement de variable par translations à gauche $a_1 = \exp \tilde{H}(xk)a$ et $n_1 = (a^{-1}\tilde{n}(xk)a)n$ donne

$$I = \int_K \int_A \int_N f(\tilde{k}(xk)a_1 n_1) \exp(2\rho(\ln a_1) - 2\rho(\tilde{H}(xk)))\, dk\, da_1\, dn_1$$

On isole l'intégration sur K en posant $f(g) = f_1(k)f_2(a)f_3(n)$ et

$$\int_K f_1(k)\, dk = \int_K f_1(\tilde{k}(xk)) \exp(-2\rho(\tilde{H}(xk)))\, dk \tag{3.7}$$

Quite à changer la forme de la fonction, on a le résultat voulu. □

Le théorème 70 nous conduit à considérer l'intégrale de la fonction sphérique élémentaire sur une boule. On va donner l'expression de l'intégrale dans la décomposition polaire (théorème 72), qui est évidemment la mieux adaptée aux fonctions K-bi-invariantes. Dans toute la suite, on considère K compact, c'est-à-dire G à centre fini.

Lemme 77 *L'intégration correspondant à la décomposition polaire $G = K(\exp \overline{\mathfrak{a}^+})K$ donne pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$,*

$$\int_G f(x)\, dx = \int_K \int_{\mathfrak{a}^+} \int_K f(k(\exp H)k')D(H)\, dk\, dH\, dk'$$

où dk, dk' est une mesure de HAAR *sur K, dH une mesure de* LEBESGUE *sur $\overline{\mathfrak{a}^+}$ et*

$$D(H) = \mathit{Det}_{\mathfrak{p}}(\mathit{sh}\, \mathit{ad}\, H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \mathit{sh}^{m_\alpha} \langle \alpha, H \rangle$$

Démonstration. On commence par utiliser la décomposition de CARTAN $\psi : K \times \mathfrak{p} \to G$ telle que $(k, Z) \mapsto k \exp(Z)$. Sa différentielle est

$$d_{(k,Z)}\psi(d_e L_k(X), Y) = d_e L_g \circ \exp(-\mathrm{ad}\, Z) \left(X + \frac{\exp(\mathrm{ad}\, Z) - I}{\mathrm{ad}\, Z} Y \right)$$

pour $X \in \mathfrak{l}$, $Y, Z \in \mathfrak{p}$ et $g = k \exp Z$. On pose

$$D_1(Z) = \mathrm{Det}_{\mathfrak{g}} \left\{ (X, Y) \mapsto \exp(-\mathrm{ad}\, Z) \left(X + \frac{\exp(\mathrm{ad}\, Z) - I}{\mathrm{ad}\, Z} Y \right) \right\}$$

$\mathrm{Det}(\exp(-\mathrm{ad}\, Z)) = \exp(-\mathrm{Trad}\, Z)$ vaut 1 car en décomposant $Z = H + N$, $H \in \mathfrak{a}$ et $N \in \mathfrak{n}$, $\mathrm{ad}(N)$ est nilpotent et $\mathrm{ad}(A)$ a une trace nulle (les espaces de poids $\pm\alpha$ ont même dimension). Pour évaluer la contribution du terme en Y sur $\mathfrak{p}$, on rappelle $[\mathfrak{l}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{l}$. Ainsi, tous les termes en $\mathrm{ad}^n Z(Y)$ avec n impair ne contribuent pas, et

$$D_1(Z) = \mathrm{Det}_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ad}\, Z)}{\mathrm{ad}\, Z} \right)$$

À ce point, on peut écrire

$$\int_G f(x)\,dx = \int_K \int_{\mathfrak{s}} f(k(\exp Z))D_1(Z)\,dk\,dZ$$

On considère ensuite l'action de K sur $\mathfrak{a}^+$ par conjugaison : $\varphi : K \times \mathfrak{a}^+ \to \mathfrak{s}'$ définie par $(k, H) \mapsto \mathrm{Ad}(k)H$, où $\mathfrak{s}'$ est un ouvert dense de $\mathfrak{s}$ et tel que la mesure de $\mathfrak{s}\backslash\mathfrak{s}'$ est nulle [GaV88]. Cette application se réduit au difféomorphisme $\tilde{\varphi} : K/M \times \mathfrak{a}^+ \to \mathfrak{s}'$, en notant M le centraliseur de $\mathfrak{a}$ dans K pour Ad et $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie. On note π la surjection $\pi : K \to K/M$. La différentielle de $\tilde{\varphi}$ s'écrit

$$d_{\pi(k),H}\tilde{\varphi}(d_k\pi(d_eL_k(X)), H') = \mathrm{Ad}(k)(H' + [d_e\pi(X), H]),$$

où $k \in K$, $X \in \mathfrak{l}$, $H \in \mathfrak{a}^+$ et $H' \in \mathfrak{a}$. On prend le déterminant

$$D_2(H) = \mathrm{Det}_{(\mathfrak{l}/\mathfrak{m})\oplus\mathfrak{a}} \{(X, H') \mapsto \mathrm{Ad}(k)(H' + [d_e\pi(X), H])\}$$

$\mathrm{Det}(\mathrm{Ad}(k)) = 1$ car K est compact. L'application linéaire $X \mapsto [X, H]$ (avec $H \in \mathfrak{a}$) de $\mathfrak{l}/\mathfrak{m}$ dans un sous-espace de $\mathfrak{s}$ a un déterminant

$$D_2(H) = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha(H)^{m_\alpha}$$

On a donc montré pour $g \in \mathcal{C}_c(\mathfrak{s})$,

$$\int_{\mathfrak{s}} g(Z)\,dZ = \int_K \int_{\mathfrak{a}^+} g(kHk^{-1})D_2(H)\,dk\,dH$$

Il reste à utiliser la décomposition d'IWASAWA (théorème 73) pour obtenir

$$D_1(H) = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \frac{\mathrm{sh}^{m_\alpha}\langle\alpha, H\rangle}{\langle\alpha, H\rangle^{m_\alpha}}$$

On aboutit enfin au résultat voulu avec $D = D_1D_2$. □

On peut alors établir le résultat principal de cette partie.

Théorème 78 [CPS07] *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe, dont le centre est fini. Alors G possède la propriété DR.*

Démonstration. On va utiliser le théorème 70. En effet, par décomposition d'IWASAWA $G = NAK$. $P = S = NA$ est fermé et moyennable car résoluble, K est compact et $G = PK$ unimodulaire car semi-simple.

G est muni de sa distance riemannienne invariante à gauche et K-invariante à droite provenant de la forme de KILLING (3.4). On considère la longueur sur G par $\ell(x) = d(e, x)$ pour $x \in G$.

Pour $f \in L^1(G)$, le lemme 77 donne

$$\int_G f(x)\,dx = C \int_K \int_{\overline{\mathfrak{a}^+}} \int_K f(k \exp(H) k')\,dk\,D(H)\,dH\,dk',$$

où C est une constante et

$$D(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\mathrm{sh}\langle \alpha, H \rangle)^{m_\alpha}$$

Si f est K-bi-invariante, cette relation se réduit à

$$\int_G f(x)\,dx = C \int_{\mathfrak{a}^+} f(\exp(H)) D(H)\,dH \tag{3.8}$$

On évalue

$$\mathrm{sh}(\alpha(H)) = \frac{1}{2} \exp(\alpha(H))\,(1 - \exp(-2\alpha(H)))$$

On remarque que pour $x \geq 0$,

$$1 - \exp(-2x) \leq \frac{4x}{1+x}$$

Comme $H \in \mathfrak{a}^+$, $\alpha(H) > 0$ pour $\alpha \in \Sigma^+$ et $\alpha(H) \leq |H|$ (lemme 74). On déduit alors

$$\mathrm{sh}(\alpha(H)) \leq \frac{1}{2} \exp(\alpha(H)) \frac{4|H|}{1+|H|}$$

Au final,

$$D(H) \leq C \left(\frac{|H|}{1+|H|} \right)^{\sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha} \exp(2\rho(H)),$$

où C est une constante. On réécrit $\displaystyle\sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha = n - l$, où n est la dimension de $S = NA$ et l le rang réel de G.

La fonction sphérique élémentaire ϕ_0 vérifie l'inégalité 75 pour $H \in \mathfrak{a}^+$:

$$\phi_0(\exp H) \leq C(1 + |H|)^d \exp\left(-\rho(H)\right)$$

Soit $r \geq 1$, on peut estimer

$$\int_G \phi_0^2(x) \mathbf{1}_{B_\ell(r)}(x)\,dx = \int_{\mathfrak{a}^+} \phi_0^2(\exp(H)) \mathbf{1}_{B_\ell(r)}(\exp H) D(H)\,dH$$

On déduit

$$\int_G \phi_0^2(x) \mathbf{1}_{B_\ell(r)}(x)\,dx \leq C \int_{\mathfrak{a}^+} |H|^{n-l} (1 + |H|)^{2d+l-n} \mathbf{1}_{B_\ell(r)}(\exp H)\,dH$$

d'où [CGH94]

$$\int_G \phi_0^2(x) \mathbf{1}_{B_\ell(r)}(x)\,dx \leq C' r^{2d} \int_{\mathfrak{a}^+} \mathbf{1}_{|H| \leq r}(H)\,dH \leq C'' r^{2d+l},$$

où C', C'' sont des constantes. Le point important de tout cela est que les termes exponentiels provenant de $D(H)$ et de la fonction sphérique élémentaire se compensent exactement, seule reste la croissance polynomiale. $\square$

Chapitre IV

Caractérisation des groupes de Lie connexes DR

On a montré dans le chapitre précédent le caractère DR des groupes de Lie semi-simples connexes à centre fini. On va s'appuyer sur ce résultat ainsi que sur une classification des algèbres de Lie réalisée par VAROPOULOUS et un résultat analytique concernant certains des groupes ainsi classifiés [Var96] pour donner une caractérisation générale des groupes de Lie possédant la propriété DR.

1 Notions sur une classification (algébrique) des algèbres de Lie

On va étudier la classification algébrique des algèbres de Lie (de dimension finie) en B-algèbres et NB-algèbres établie par VAROUPOULOS [Var96], ainsi qu'une conséquence pour les algèbres unimodulaires.

On commence par quelques définitions et propriétés classiques concernant le *nilradical*.

Théorème 79 (nilradical) [Kna02] *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (de dimension finie). Il existe un unique idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, appelé nilradical de $\mathfrak{g}$, qui contient tout idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Le nilradical de $\mathfrak{g}$ est contenu dans le radical de $\mathfrak{g}$, et est même égal au nilradical du radical vu comme une algèbre de Lie. En pratique, le nilradical de $\mathfrak{g}$ est exactement formé des éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que $ad_{\mathfrak{g}}(X)$ est nilpotent. Enfin, $[\mathfrak{g}, rad(\mathfrak{g})] \subset nil(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. On pourra consulter [Kna02] pour ces résultats usuels. □

On remarquera que le nilradical d'une algèbre de Lie non semi-simple n'est pas trivial. En effet, si $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple, son radical $\mathfrak{q}$ est non nul. On définit pour $n \geq 1$ l'idéal $\mathfrak{q}^n$ par $\mathfrak{q}^1 = \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}^{n+1} = [\mathfrak{q}^n, \mathfrak{q}^n]$. Alors, il existe n_0 tel que $\mathfrak{q}^{n_0} \neq 0$ et $\mathfrak{q}^{n_0+1} = 0$, et $\mathfrak{q}^{n_0}$ est un idéal nilpotent.

Exemple 80 dans une décomposition d'IWASAWA d'un groupe de Lie semi-simple réel non compact, le nilradical de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est $\mathfrak{n}$. En effet, $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$, et c'est le plus grand car si x est un élément non nul de $\mathfrak{a}$, alors $[x, [x, [\ldots [x, \mathfrak{n}] \ldots]]] \neq 0$.

Soit $\mathfrak{q}$ une algèbre de Lie résoluble complexe et $\mathfrak{n}'$ son nilradical. On s'intéresse à la représentation adjointe de $\mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{n}'$. D'après le théorème de LIE, il est possible de trouver une base de $\mathfrak{n}'$ dans laquelle toutes les applications $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}'}(X)$, $X \in \mathfrak{q}$, sont triangulaires supérieures. Les coefficients diagonaux, appelés racines, sont des éléments de $\mathfrak{q}^*$ (et même de $(\mathfrak{q}/\mathfrak{n}')^*$ car les éléments $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}'}(Y)$, $Y \in \mathfrak{n}'$, sont nilpotents) et sont notés $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($k = \dim \mathfrak{n}'$).

Si $\mathfrak{q}$ est une algèbre de Lie réelle, on reprend la procédure précédente en travaillant sur les algèbres de Lie complexifiées et on obtient de même les racines λ_j, qui sont des formes linéaires complexes sur le complexifié de $\mathfrak{q}$ noté $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$. On pose alors $L_j = \Re e(\lambda_j)$ si L_j est non nul (plus précisément, cette partie réelle est définie par $L_j(X) = \Re e(\lambda_j(X))$ pour X appartenant à $\mathfrak{q}$). Les L_j, éléments de $(q/\mathfrak{n}')^*$, sont appelées *racines réelles*. On notera $k' \leq k$ le nombre de racines réelles effectivement définies. Soit $\mathcal{L}$ l'enveloppe convexe des racines réelles :

$$\mathcal{L} = \{\sum_{i=1}^{k'} \alpha_i L_i : \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k'} \alpha_i = 1\}$$

On arrive à la définition suivante.

Définition 81 *Soit* $\mathfrak{q}$ *une algèbre de Lie réelle résoluble.* $\mathfrak{q}$ *est une C-algèbre si* $0 \in \mathcal{L}$*, et une NC-algèbre sinon.*

On pourra faire les remarques suivantes :

- si $\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathfrak{q}$ est une R-algèbre (définition 51). En effet, si $X, Y \in \mathfrak{q}$, $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ appartient au nilradical $\mathfrak{n}'$ (théorème 79). Alors, les valeurs propres non nulles de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{q}}(X)$ sont forcément à chercher dans le nilradical $\mathfrak{n}'$. La condition $\mathcal{L} = \emptyset$ assure que toutes les parties réelles des valeurs propres sont nulles ;
- une R-algèbre résoluble réelle est forcément une NC-algèbre unimodulaire. Réciproquement, une NC-algèbre (résoluble réelle) unimodulaire est de type R.

Exemple 82 Le sous-groupe $\mathbb{S}_l$ ($l = (l_1, l_2)$) de $GL_3(\mathbb{R})$, formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \exp(l_1 x) & 0 & u \\ 0 & \exp(l_2 x) & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $x, u, v \in \mathbb{R}$, s'identifie à un produit semi-direct de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}$, avec la loi

$$((u, v), x).((u', v'), x') = (u + u' \exp(l_1 x), v + v' \exp(l_2 x), x + x')$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 3, est définie par la base (U, V, X) avec les commutateurs $[U, V] = 0$, $[X, U] = l_1 U$ et $[X, V] = l_2 V$.

Cette algèbre est résoluble et son nilradical est $\mathfrak{n}' = \mathrm{Vect}(U, V)$. Alors,

$$\mathrm{ad}_{n'}(X) = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{ad}(U)$ et $\mathrm{ad}(V)$ sont nilpotents. On déduit que $\mathfrak{g}$ est de type C si $l_1 l_2 < 0$ et de type NC si $l_1 l_2 > 0$.

On continue la classification. Pour une algèbre de Lie non résoluble, on va se ramener à la classification C/NC à partir des décompositions de LEVI et IWASAWA.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle (toujours de dimension finie), sa décomposition de LEVI (théorème 48) s'écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \rtimes_\pi \mathfrak{s}$, où $\mathfrak{q}$ est le radical de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre semi-simple (ou nulle). On applique ensuite une décomposition d'IWASAWA (théorème 73) sur $\mathfrak{s}$: $\mathfrak{s} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ est résoluble. Alors,

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

appelé *radical d'*IWASAWA de $\mathfrak{g}$ est résoluble. Cela découle du fait que $\mathfrak{q}$ est un idéal résoluble, $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}$ nilpotent. On notera la non-unicité en général d'un tel radical d'IWASAWA. Si $\mathfrak{g}$ est moyennable (définition 49), il y a en revanche unicité car $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = 0$.

Définition 83 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle (de dimension finie). On dit que $\mathfrak{g}$ de type B (NB) si un radical d'*IWASAWA *de $\mathfrak{g}$ est de type C (NC).*

Il faut évidemment vérifier que cette caractérisation ne dépend pas du radical d'IWASAWA choisi, cette vérification est effectuée dans [Var96]. On remarquera que pour une algèbre de Lie moyennable, le caractère B ou NB de $\mathfrak{g}$ dépend uniquement du caractère C ou NC de son radical $\mathfrak{q}$.

Exemple 84 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle semi-simple de type non compact. On écrit la décomposition d'IWASAWA, avec $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \neq 0$. Il résulte de la structure des racines réduites ($\mathfrak{n}$ est associée aux racines positives) que $\mathfrak{g}$ est de type NB.

On arrive au théorème de structure des algèbres de Lie unimodulaires.

Théorème 85 [Var96] *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle* **unimodulaire***. Soit $\mathfrak{g}$ est une B-algèbre, soit $\mathfrak{g}$ s'écrit comme produit direct $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times \mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{s}$ semi-simple (voire nulle) et $\mathfrak{p}$ de type R.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle unimodulaire.

Tout d'abord, considérons le cas où $\mathfrak{g}$ est résoluble (unimodulaire). Alors, soit $\mathfrak{g}$ est de type C, donc B, soit $\mathfrak{g}$ est de type NC unimodulaire, donc de type R d'après la remarque suivant la définition 81, ce qui conclut ce premier cas.

On considérera désormais que $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble, et on écrit les décompositions de LEVI et IWASAWA comme précédemment : $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \rtimes_\pi \mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{g}$ est moyennable, la décomposition d'IWASAWA est triviale : $\mathfrak{s} = \mathfrak{l}$, et $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}$ (avec les notations précédentes). Ainsi, on écrit $\mathfrak{g}$ comme produit direct par le lemme 86 où $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} = 0$.

On supposera donc par la suite que $\mathfrak{s}$ n'est pas compacte ou nulle. Pour évaluer les racines réelles, on suit la procédure décrite précédemment en considérant la représentation adjointe de $\mathfrak{r}$ sur son nilradical $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{n}$ (où $\mathfrak{n}'$ est le nilradical de $\mathfrak{g}$, voir le lemme 87). $\mathfrak{n}'$ est stable et on s'intéressera simplement à la restriction à $\mathfrak{n}'$ de la représentation adjointe de $\mathfrak{r}$ (le cas $\mathfrak{n}' = 0$ correspond à $\mathfrak{g}$ semi-simple, donc $\mathfrak{q} = 0$, et le lemme 86 permet de conclure). Comme $\mathfrak{r}$ est résoluble, il existe une base où tous les $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}'_{\mathbb{C}}}(x)$ pour $x \in \mathfrak{r}$ sont triangulaires supérieures (on a complexifié $\mathfrak{n}'$ en $\mathfrak{n}'_{\mathbb{C}}$ pour pouvoir appliquer le théorème de LIE) :

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}'_{\mathbb{C}}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p(x) \end{pmatrix}$$

Les λ_j sont des formes linéraires de $\mathfrak{r}$ dans $\mathbb{C}$, et même de $\mathfrak{r}/\bar{\mathfrak{n}} = (\mathfrak{q}/\mathfrak{n}') \oplus \mathfrak{a}$ dans $\mathbb{C}$ car $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}'_{\mathbb{C}}}(x)$ est nilpotent pour $x \in \bar{\mathfrak{n}}$. On va ensuite s'intéresser à l'enveloppe convexe des racines réelles L_j associées aux λ_j (on ne les obtient pas toutes, mais il en résulte une information suffisante). On tient provisoirement pour acquis que :
i) la trace de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}'}(x)$ est nulle pour $x \in \mathfrak{a}$;
ii) tous les λ_j définis ci-dessus sont à valeurs réelles sur $\mathfrak{a}$: $\lambda_j(x) \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathfrak{a}$;
iii) si on suppose $[\mathfrak{n}', \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}] \neq 0$, alors il existe un certain j_0 tel que $\lambda_{j_0}(x_0) \neq 0$ pour un certain $x_0 \in \mathfrak{a}$.
Comme $\mathfrak{g}$ est unimodulaire, pour $x \in \mathfrak{q}/\mathfrak{n}'$,

$$0 = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{q}}(x)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}'}(x)) = \lambda_1(x) + \ldots + \lambda_p(x) = 0 \qquad (4.1)$$

vu le théorème 79. Par le point i), on étend l'égalité (4.1) à tout $x \in (\mathfrak{q}/\mathfrak{n}') \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{q}/\bar{\mathfrak{n}}$, et

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 0$$

Si $[\mathfrak{n}', \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}] = 0$, les lemmes 88 et 86 permettent de conclure. Sinon, le point iii) suivi du point ii) nous donne l'existence d'une racine réelle non nulle L_{j_0}. La nullité de la somme montre que $\mathfrak{g}$ est une B-algèbre.

On va finalement donner les preuves des trois points précédemment admis.
i) L'action adjointe de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{n}'$ se prolonge en une action de $\mathfrak{s}$ sur $\mathfrak{n}'$. Or, la trace d'une représentation d'une algèbre de Lie semi-simple est toujours nulle.
ii) et iii) On utilise la décomposition de CARTAN ayant mené à celle d'IWASAWA : $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$. $\mathfrak{u} = \mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre compacte de la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, vue comme une algèbre réelle. Si on s'intéresse à une représentation (ρ, V) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, il existe un produit scalaire sur V qui est ad $\mathfrak{u}$-invariant (cela provient du fait que le groupe de Lie immergé connexe associé à $\mathfrak{u}$ est compact, et donc qu'on peut trouver un produit scalaire sur V orthogonal pour celui-ci). Les applications de $\rho(\mathfrak{u})$ sont ainsi anti-hermitiennes. Comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \subset i\mathfrak{u}$, celles de $\rho(\mathfrak{a})$ sont hermitiennes, soit à valeurs propres réelles. De plus, si $A \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}(A) = 0$, alors $A = 0$ (on rappelle qu'aux éléments de $\mathfrak{n}$ sont associées des racines réduites non nulles). On applique alors ces résultats à la représentation adjointe de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ sur $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$. □

Lemme 86 *Supposons, en utilisant les notations précédentes, que* $\mathfrak{g}$ *n'est pas de type B, et* $[\mathfrak{q}, \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}] = 0$. *Alors,* $\mathfrak{g}$ *s'écrit comme produit direct* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{s}_1$, *où* $\mathfrak{g}_1$ *est une R-algèbre et* $\mathfrak{s}_1$ *est semi-simple ou nulle.*

Démonstration. $I = \{X \in \mathfrak{s} : \ [\mathfrak{q}, X] = 0\} \subset \mathfrak{s}$ est un idéal de $\mathfrak{s}$ contenant $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Par conséquent, vu la décomposition d'une algèbre semi-simple, $\mathfrak{s}$ s'écrit comme produit direct de I par $\tilde{\mathfrak{s}}$ qui est soit l'algèbre nulle, soit une algèbre semi-simple compacte : $\mathfrak{s} = I \times \tilde{\mathfrak{s}}$. On pose alors $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{q} \rtimes_\pi \tilde{\mathfrak{s}}$, et $\mathfrak{s}_1 = I$ pour conclure. En effet, $\mathfrak{s}_1$ est semi-simple, et $\mathfrak{g}_1$ de type R car unimodulaire, moyennable et de type NB. □

Lemme 87 *Avec les notations précédentes, soit* $\mathfrak{n}'$ *le nilradical de* $\mathfrak{g}$. *Alors,* $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{n}$ *est le nilradical de* $\mathfrak{r}$.

Démonstration. On appelle $\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ le nilradical de $\mathfrak{r}$. Déjà, il est clair que $\mathfrak{n}'$, le nilradical de $\mathfrak{g}$ est inclus dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$. Ensuite,

$$\mathfrak{n} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$$

car $\mathfrak{r}$ étant résoluble, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{r}$. Ainsi, $\bar{\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$.

Réciproquement, $\mathfrak{n}_\mathfrak{r} \cap \mathfrak{q}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{q}$. En effet, $\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{q}$ sont des idéaux de $\mathfrak{r}$, donc leur intersection aussi. Comme elle est incluse dans $\mathfrak{q}$, c'est aussi un idéal de $\mathfrak{q}$. $\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ est nilpotent donc $\mathfrak{n}_\mathfrak{r} \cap \mathfrak{q}$ aussi. On en déduit $(\mathfrak{n}_\mathfrak{r} \cap \mathfrak{q}) \subset \mathfrak{n}'$. De plus, comme $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{q}$ (le nilradical est inclus dans le radical), on obtient

$$\mathfrak{n}' \ = \ \mathfrak{n}' \cap \mathfrak{q} \subset \ (\mathfrak{n}_\mathfrak{r} \cap \mathfrak{q})$$

ce qui montre l'égalité $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}_\mathfrak{r} \cap \mathfrak{q}$.

Ensuite, soit la projection $\pi : \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{q} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$. Comme π est surjectif, $\pi(\mathfrak{n}_\mathfrak{r})$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{r}/\mathfrak{q}$, donc est inclus dans le nilradical de $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$, c'est-à-dire $\mathfrak{n}$ (exemple 80). Ainsi, $\pi(\mathfrak{n}_\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{n}$, d'où

$$\mathfrak{n}_\mathfrak{r} \ \subset \ \mathfrak{n} \oplus (\mathfrak{n}_\mathfrak{r} \cap \mathfrak{q}) \ = \ \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}' \ = \ \bar{\mathfrak{n}}$$

□

Lemme 88 *Avec les notations précédentes, où* $\mathfrak{n}'$ *est le nilradical de* $\mathfrak{g}$, *si* $[\mathfrak{n}', \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}] = 0$, *alors* $[\mathfrak{q}, \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}] = 0$.

Démonstration. $\mathfrak{q}$ est une représentation de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$ par ad. $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{q}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, donc un sous-espace stable. Par le théorème de WEYL sur les représentations de dimension finie des algèbres de Lie semi-simples, il existe un supplémentaire $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{n}'$ dans $\mathfrak{q}$: $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{h}$, stable par l'action de $\mathfrak{s}$, soit $[\mathfrak{s}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Or,

$$[[\mathfrak{s}, \mathfrak{q}], [\mathfrak{s}, \mathfrak{q}]] \subset [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{n}',$$

où la seconde inclusion provient de la dernière assertion du théorème 79. Toujours par ce dernier résultat, comme $\mathfrak{h}$ est inclus dans le radical $\mathfrak{q}$, $[\mathfrak{s}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{n}'$. $\mathfrak{h}$ étant un sous-espace stable par l'action de $\mathfrak{s}$, forcément $[\mathfrak{s}, \mathfrak{h}] = 0$.

Alors, on déduit immédiatement $[\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}, \mathfrak{h}] = 0$. L'hypothèse de l'énoncé $[\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}, \mathfrak{n}'] = 0$ mène alors à la conlusion. □

2 Distorsion

Une notion intervenant dans la transmission de la propriété DR par extension centrale est celle de distorsion.

Définition 89 *Soit $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante. Soient H et G deux groupes engendrés par des compacts avec H sous-groupe de G. On note respectivement ℓ_H et ℓ_G des longueurs de mots pour H et G.*

H a une distorsion *au plus D en G si pour tout $h \in H$,*

$$\ell_H(h) \leq D(\ell_G(h))\ell_G(h)$$

Si D est polynomiale, la distorsion est dite polynomiale. Si D est constante, H est dit non distordu.

On va donner deux exemples, utiles pour la suite.

Lemme 90 *Si Z est le centre cocompact (c'est-à-dire tel que $K = G/Z$ soit compact) d'un groupe localement compact G, alors Z n'est pas distordu en G.*

Démonstration. Soit S et T des compacts symétriques engendrant G et Z respectivement. On considère une section σ localement compacte de $p : G \to G/Z$ [Keh84]. Alors, tout élément g de G s'écrit $g = z\sigma(k)$, où $z \in Z$ et $k \in K$. Considérons pour $g \in Z$ une écriture de longueur minimale $r = \ell_S(g)$ par rapport à ℓ_S :

$$\begin{aligned} g &= g_1 \dots g_r = z_1\sigma(k_1) \dots z_r\sigma(k_r) \\ &= z_1 \dots z_r(\sigma(k_1) \dots \sigma(k_r)) \end{aligned} ,$$

avec pour tout i, $g_i \in S$ et le produit $\sigma(k_1) \dots \sigma(k_r)$ est élément de Z.

On va majorer les longueurs obtenues pour l'écriture en mots de T. Les z_i sont forcément contenus dans un compact de G (donc de Z), car $z_i = g_i\sigma(k_i)^{-1}$ et chacun de deux termes du produit est dans un compact. Ainsi, $\ell_T(z_i) \leq C'$ indépendamment de i. Au final,

$$\ell_T(g) \leq r(C + C') = \ell_S(g)(C + C')$$

Z n'est donc pas distordu en G. □

Lemme 91 [CPS07] *Le centre $Z(\tilde{G})$ d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe $\tilde{G}$ n'est pas distordu en $\tilde{G}$.*

Démonstration. Soit $G = \tilde{G}/Z$, et la projection canonique $p : \tilde{G} \to G$. Comme $\tilde{G}$ est semi-simple, Z est discret et le centre de G est trivial [Kna02]. On va classiquement s'intéresser à G dans un premier temps. On écrit la décomposition d'IWASAWA : $G = NAK$, avec K compact et $S = NA$ simplement connexe (théorème 73). Soit alors $\phi : G \mapsto S \times K$ telle que $g \mapsto (s, k)$. On fixe alors une métrique riemanienne invariante à gauche sur G et une sur $S \times K$ considéré comme un produit direct. G et $S \times K$ disposent d'une structure d'espace métrique. Comme K est compact, ϕ est bi-lipschitzienne [Var99].

On revient à $\tilde{G}$. On pose alors $\tilde{K} = p^{-1}(K)$ et $\tilde{S}$ est la composante connexe de e dans $p^{-1}(S)$. Alors, $Z \subset \tilde{K}$, $Z \cap \tilde{S} = \{e\}$, et $\tilde{G} = \tilde{S}\tilde{K}$ [Kna02]. Alors l'application $\tilde{\phi} : \tilde{G} \to \tilde{S} \times \tilde{K}$ telle que $\tilde{g} \mapsto (\tilde{s}, \tilde{k})$ est bien définie et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "p"] & \tilde{S} \times \tilde{K} \arrow[d, "p_1"] \\ G \arrow[r, "\phi"] & S \times K \end{tikzcd}$$

où p_1 est le produit du recouvrement trivial $\tilde{S} \to S$ et du recouvrement $\tilde{K} \to K$. On munit $\tilde{G}$ (respectivement $\tilde{S} \times \tilde{K}$) de la métrique riemanienne faisant de p (respectivement p_1) une isométrie locale. Alors, $\tilde{\phi}$ est aussi bi-lipschitzienne.

On va utiliser les longueurs induites par la métrique riemanienne sur ces variétés riemaniennes : $\ell(g) = d(e, g)$, où d est la distance riemanienne. Le sous-groupe Z de $\tilde{K}$ est cocompact, donc non distordu (théorème 90), et l'inclusion $\tilde{K} \subset \tilde{S} \times \tilde{K}$ est totalement géodésique, donc non distordue de même. $\tilde{\phi}^{-1}$ étant lipschitzienne, on conclut donc que Z n'est pas distordu en $\tilde{G}$. $\square$

Pour traiter les extensions centrales, on va aussi utiliser le lemme suivant liant la distorsion d'un sous-groupe contenant le centre à celle de son image par un morphisme surjectif.

Lemme 92 *Soit $p : G \to Q$ un morphisme surjectif de groupes engendrés par des compacts. Soit H un sous-groupe de G contenant* $\operatorname{Ker} p$. *Alors la distorsion de $p(H)$ dans Q est bornée par celle de H dans G.*

Démonstration. Soient S et T des compacts symétriques engendrant G et H respectivement. Par conséquent, $p(S)$ et $p(T)$ sont des compacts engendrant respectivement $p(G) = Q$ et $p(H)$. Soit D la distorsion de H par rapport à G, vis-à-vis des longueurs ℓ_S et ℓ_T. Soit $q \in p(H)$. Comme $\operatorname{Ker} p \subset H$, si on choisit un antécédent h de q de longueur $\ell_S(h)$ minimale, alors $\ell_S(h) = \ell_{p(S)}(q)$. En effet, il est clair que pour un antécédent h de q, $\ell_{p(S)}(q) \leq \ell_S(h)$. Si on suppose que l'inégalité est stricte, q possède une écriture plus courte en mots de $p(S)$: $q = p(x_1) \dots p(x_r)$, où $r < \ell_S(h)$. Comme $p(x_1 \dots x_r) = p(h)$, il existe $k \in \operatorname{Ker} p$ tel que $x_1 \dots x_r = kh$. Alors kh est un élément de H, antécédent de q, et de longueur strictement inférieure à celle de h.

Ainsi, en utilisant la distorsion de H dans G et la spécificité de h détaillée ci-dessus,

$$\ell_{p(T)}(q) \leq \ell_T(h) \leq D(\ell_S(h))\ell_S(h) = D(\ell_{p(S)}(q))L_{p(S)}(q)$$

et $p(H)$ est distordu dans Q au maximum comme H dans G. $\square$

Ce lemme s'appliquera notamment pour les passages au quotient par un sous-groupe distingué, et aux suites exactes.

3 Extensions centrales

L'étape suivante concerne la transmission de la propriété DR par extensions centrales.

Définition 93 *Un groupe E est dit* extension centrale *du groupe abélien A par le groupe G si on a la suite exacte*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

avec A inclus dans le centre de E.

Théorème 94 *Les deux propositions suivantes sont équivalentes, étant donnés deux groupes $(A, +)$ et $(G, .)$, A étant abélien :*

1. *le groupe E est une extension centrale de A par G, et on dispose d'une section $\sigma : G \to E$ de la surjection p (une section σ correspondant à une surjection p est une application telle que $p \circ \sigma = Id_G$) ;*
2. *E s'identifie à $A \times G$ en tant qu'ensemble et il existe une application $c : G \times G \to A$ nommée* cocycle *telle que*
   - $c(x, e) = c(e, x) = 0$ *pour tout $x \in G$;*
   - *pour tous $x, y, z \in G$, on a la condition de cocycle*

   $$c(x, y) + c(xy, z) = c(y, z) + c(x, yz)$$

   La loi de groupe est alors donnée par

   $$(a, x).(b, y) = (a + b + c(x, y), xy)$$

   pour tous $a, b \in A$ et $x, y \in G$.

Remarque 95 Si σ est un morphisme de groupes, l'extension centrale se réduit à un produit direct.

Démonstration. Montrons déjà que 2) implique 1). On vérifie effectivement les lois de groupes. Notamment,

$$(a, x)^{-1} = (-a - c(x, x^{-1}), x^{-1})$$

pour $a \in A$ et $x \in G$.

Ensuite, $i : A \to E$ est définie par $i(a) = (a, e)$, et $p : E \to G$ par $p(a, x) = x$ pour $a \in A$ et $x \in G$. On pose comme section $\sigma : G \to E$ telle que $\sigma(x) = (0, x)$. On note que le cocycle c est lié à la section σ par $(c(x, y), e) = \sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}$.

Réciproquement, on identifie A à $i(A)$, sous-groupe central de G. Tout élément de $t \in E$ s'écrit de manière unique $t = a\sigma(x)$ avec $a \in A$ et $x \in G$. Donc, E s'écrit comme $A \times G$, et t sera noté $t = (a, x)$. Ainsi, avec les notations précédentes, on réécrit $i(a) = (a, e)$, $p(t) = p((a, x)) = x$. Soient alors $a, b \in A$ et $x, y \in G$. Alors, on va exprimer le produit dans cette écriture

$$p\left((a, x).(b, y)\right) = xy \quad \text{d'où} \quad (a, x).(b, y) = (a', xy),$$

où $a' \in A$. On évalue alors a' par

$$a\sigma(x)b\sigma(y) = ab\sigma(x)\sigma(y) = ab\sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}\sigma(xy) = (a + b + c(x, y), xy)$$

où $c(x, y) = \sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}$ est à valeurs dans A. On vérifie alors aisément les relations sur c. $\square$

On aura besoin par la suite de sections vérifiant quelques propriétés.

Théorème 96 *Soit $p : E \to G$ un morphisme de groupes engendrés par des compacts. Alors, il existe une section borélienne σ localement bornée (c'est-à-dire que $\sigma(K)$ est relativement compact pour K compact), lipschitzienne pour les longueurs de mots, et vérifiant $\sigma(e) = e$.*

Auparavant, on considère le lemme suivant.

Lemme 97 *Soit G un groupe engendré par un compact et soit K un compact générateur symétrique qui soit voisinage de e. Alors, il existe une partition pointée (G_n, g_n) dénombrable $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, où les G_n sont des parties boréliennes relativement compactes de G et $g_n \in G_n$ tel que $g_n^{-1}G_n \subset K$.*

Démonstration. Soit $\{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ un ensemble maximal d'éléments de G tel que $d(g_p, g_q) = \ell_K(g_p^{-1}g_q) > 1$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. Comme la boule de rayon 1 et centrée en e est un voisinage de e, $\{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est discret dans G. Comme G est engendré par K, $\{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est alors au plus dénombrable. On définit alors

$$G_0 = K \quad G_1 = (g_1K)\backslash G_0 \quad \dots \quad G_n = (g_nK)\backslash \left(\bigcup_{k<n} G_k\right)$$

Par construction, (G_n) forme une partition de G, g_n est bien élément de G_n et $g_n^{-1}G_n$ inclus dans K. $\square$

Démonstration du théorème 96. Soit K un compact générateur symétrique qui soit voisinage de e. On considère la partition pointée (G_n, g_n) du lemme 97 pour G. Soit S un compact engendrant E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend un antécédent e_n de longueur minimale de g_n par l'application p. On considère une section borélienne σ_K de p dont l'image est relativement compacte [Keh84] (on peut supposer $\sigma_K(e) = e$). On va améliorer cette section pour qu'elle ait les propriétés souhaitées. Soit alors $\sigma : G \to E$ telle que

$$\text{pour } x \in G_n,\ \sigma(x) = e_n\sigma_K(g_n^{-1}x)$$

Il est clair que σ est une section de p. Si on a choisit e comme l'un des g_n, $\sigma(e) = e$.

Montrons finalement que σ est lipschitzienne. Soit $C = \sup\{\ell_S(g) : g \in \sigma_K(K)\}$. Comme $\sigma_K(K)$ est relativement compact, $C < \infty$. Si g_n est de longueur m, il existe des éléments de K notés $k_1,\dots,k_m$ tels que $g_n = k_1 \dots k_m$. Ainsi,

$$p(\sigma_K(k_1)\dots\sigma_K(k_m)) = g_n \quad \text{et} \quad \ell_S(\sigma_K(k_1)\dots\sigma_K(k_m)) \le mC$$

Vu que e_n est l'antécédent de g_n le plus court, $\ell_S(e_n) \leq mC = \ell_K(g_n)$. Au final, si $x \in G_n$,

$$\ell_S(\sigma(x)) = \ell_S(e_n \sigma_K(g_n^{-1}x)) \leq \ell_S(e_n) + C \leq C\ell_K(g_n) + C \leq C(\ell_K(x) + 2),$$

ce qui conclut. En effet, on peut majorer cette dernière quantité par une autre constante multipliée par $\ell_K(x)$ (car $\ell_K(y) \geq 1$ si $y \neq e$). □

On arrive alors au résultat principal de cette partie.

Théorème 98 [CPS07] *Soit* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$ *une suite exacte de groupes engendrés par des compacts, avec A fermé et central (inclus dans le centre de E). Si G a la propriété DR et si A a une distorsion polynomiale en E, alors E possède la propriété DR.*

Démonstration. Soient S, T, $U = p(S)$ des compacts symétriques voisinages de l'élément neutre dans A, E et G. On note P_G et P_A les polynômes correspondant à la propriété DR de G et A. Soit σ une section de p telle que dans le théorème 96. Tout élément de E s'écrit de manière unique $a\sigma(x)$, avec $a \in A$ et $x \in G$. Pour $x, y \in G$, on définit le cocycle $c(x, y) = \sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}$ à valeurs dans A (théorème 94). Soient $f, g \in \mathcal{C}_c(E)$. On pose

$$\begin{aligned} f_y(a) = f(a\sigma(y)) \quad \text{et} \quad g'_{(x,y)}(a) &= g_{xy^{-1}}(a - c(xy^{-1}, y)) \\ &= g((a - \sigma(xy^{-1})\sigma(y)\sigma(x)^{-1})\sigma(xy^{-1})) \\ &= g(a\sigma(x)\sigma(y)^{-1}) \end{aligned}$$

pour $x, y \in G$ et $a \in A$. Grâce à ces fonctions, on va lier les convolutions pour les fonctions sur E à celles sur A.

Déjà, f_y et $g_{(x,y)}$ sont mesurables, bornées, à support compact, donc sont dans $L^2(A)$. Ensuite, comme E agir sur l'espace homogène $G \simeq E/A$, d'après le théorème 28,

$$\begin{aligned} f \star g(a\sigma(x)) &= \int_E f(u)g(a\sigma(x)u^{-1})\, du = \int_{E/A} d(yA) \int_A db\, f(yb)g(a\sigma(x)b^{-1}y^{-1}) \\ &= \int_G dy \int_A db\, f(b\sigma(y))g(ab^{-1}\sigma(x)\sigma(y)^{-1}) \\ &= \int_G f_y \star_A g'_{(x,y)}(a)\, dy \end{aligned}$$

où $\star$ ($\star_A$) est la convolution sur E (A). On en déduit de même

$$\begin{aligned} ||f \star g||_{2,E}^2 &= \int_G \left(\int_A \left| \int_G f_y \star_A g'_{(x,y)}(a)\, dy \right|^2 da \right) dx \\ &\leq \int_G \left(\int_G \left| \int_A |f_y \star_A g'_{(x,y)}(a)|^2\, da \right|^{1/2} dy \right)^2 dx \\ &\leq \int_G \left(\int_G ||f_y \star_A g'_{(x,y)}||_{2,A}\, dy \right)^2 dx \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de MINKOWSKI.

On suppose ensuite que le support de f est contenu dans la boule de rayon r (centrée en e) de E. On fixe $y \in G$ puis on s'intéresse au support de f_y. Soit $a \in A$ un élément de ce support. Alors, forcément $\ell_T(a\sigma(y)) \leq r$, d'où

$$\ell_T(a) \leq \ell_T(a\sigma(y)) + \ell_T(\sigma(y))$$

Or, en notant $\alpha > 0$ le rapport de Lipschitz de σ,

$$\ell_T(\sigma(y)) \leq \alpha\ell_U(y) = \alpha\ell_U(p(a\sigma(y))) \leq \ell_T(a\sigma(y))$$

On déduit

$$\ell_T(a) \leq (1+\alpha)\ell_T(a\sigma(y)) = (1+\alpha)r$$

Enfin, la distorsion au plus polynomiale de A par rapport à E qu'on désigne par le polynôme D donne

$$\ell_S(a) \leq D(\ell_T(a))\ell_T(a) \leq P(r)$$

pour un certain polynôme P. On peut à ce niveau utiliser la propriété DR de A, d'où :

$$||f \star g||_{2,E}^2 \leq \int_G \left(\int_G P_A(P(r))||f_y||_{2,A}||g'_{(x,y)}||_{2,A}\, dy \right)^2 dx$$

Enfin, il reste à utiliser la propriété DR de G. À partir des fonctions f et g de $\mathcal{C}_c(E)$, on définit $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^2(G)$ par $\tilde{f}(y) = ||f_y||_{2,A}$ si $y \in G$ (de même pour $\tilde{g}$). On remarque immédiatement que $||\tilde{f}||_{2,G} = ||f||_{2,E}$ (de même pour $\tilde{g}$) et que le support de $\tilde{f}$ est contenu dans la boule de rayon r (la surjection p est 1-lipschitzienne pour les longueurs choisies). Ensuite,

$$||g'_{(x,y)}||_{2,A} = ||g_{xy^{-1}}||_{2,A} = \tilde{g}(xy^{-1})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} ||f \star g||_{2,E}^2 &\leq P_A(P(r))^2 \int_G \left(\int_G \tilde{f}(y)\tilde{g}(xy^{-1})\, dy \right)^2 dx \\ &\leq P_A(P(r))^2 ||\rho_G(\tilde{f})(\tilde{g})||_{2,G}^2 \end{aligned}$$

G est unimodulaire (théorème 13), donc $||\rho(\tilde{f})||_{2\to2} = ||\lambda(\tilde{f})||_{2\to2}$. La propriété DR de G donne

$$||f \star g||_{2,E}^2 \leq P_A(P(r))^2 P_G(r)^2 ||f||_{2,E}^2 ||g||_{2,E}^2$$

E a donc la propriété DR. □

4 Application aux groupes de Lie connexes

On a déjà montré que tout groupe de Lie semi-simple connexe à centre fini possède la propriété DR (théorème 98). On va caractériser précisément les groupes de Lie connexes possèdant cette propriété.

Tout d'abord, on va utiliser un théorème non élémentaire, liant aspects algébriques et analytiques des B-groupes (on dit qu'un groupe de Lie connexe réel G est un B-groupe si son algèbre de Lie est une B-algèbre). Le contexte général est le suivant. Pour caractériser les groupes de Lie connexes, on peut s'intéresser à la croissance de leur volume (approche géométrique, voir le chapitre II). On peut aussi les classer algébriquement, par exemple selon leur nature B/NB. Une autre possibilité de nature analytique probabiliste et inspirée par les marches aléatoires sur les groupes est la suivante. Si ϕ est une fonction positive continue sur G à support compact, avec $\phi^* = \phi$ et d'intégrale 1 (ϕ va donc définir une probabilité sur G), on étudie le comportement quand n tend vers l'infini de la valeur en un élément fixé de G de la convolée n[ième] de ϕ. Ces différentes approches sont bien évidemment liées, et sont encore sujets de recherche. Le résultat suivant de VAROPOULOS va être d'intérêt particulier pour la suite.

Théorème 99 [Var96] *Soit G un B-groupe et soit ϕ une fonction sur G continue positive, à support compact, d'intégrale sur G égale à 1. On suppose que $\phi^* = \phi$. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que les convolées successives $\phi^{(n)}$ définies par*

$$\phi^{(0)} = \phi \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi^{(n+1)} = \phi^{(n)} \star \phi$$

satisfont à

$$\phi^{(n)}(e) = \mathcal{O}\left(||\lambda(\phi^{(n)})||_{2\to 2} \exp(-cn^{1/3})\right)$$

pour n tendant vers $+\infty$.

La démonstration étant clairement non élémentaire, nous renvoyons à la référence [Var96]. En revanche, on détaille la conséquence essentielle suivante.

Corollaire 100 [Var96] *Un B-groupe ne peut pas posséder la propriété DR.*

Démonstration. Soit G un B-groupe possédant la propriété DR. On considère une fonction ϕ vérifiant les hypothèses du théorème 99. Alors, $||\lambda(\phi^{(2n)})||_{2\to 2} \leq ||\lambda(\phi^{(n)})||^2_{2\to 2}$. D'après le théorème 99, il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\phi^{(2n)}(e) \leq A\|\lambda(\phi^{(2n)})\|_{2\to 2} \exp(-cn^{1/3}) \leq A\|\lambda(\phi^{(n)})\|^2_{2\to 2} \exp(-cn^{1/3})$$

On pose $f = \phi^{(n)}$, d'où $\phi^{(2n)}(e) = \|f\|_2^2$ vu l'unimodularité de G (théorème 13). Alors, comme G possède la propriété DR, en notant P le polynôme correspondant pour la longueur de mots correspondant à un compact contenant le support de ϕ,

$$\begin{aligned}\|\lambda(f)\|^2_{2\to 2} &\leq P(n)^2\|f\|_2^2 = P(n)^2\phi^{(2n)}(e)\\ &\leq AP(n)^2\|\lambda(\phi^{(n)})\|^2_{2\to 2}\exp(-cn^{1/3})\\ &= AP(n)^2\|\lambda(f)\|^2_{2\to 2}\exp(-cn^{1/3}),\end{aligned}$$

Cette assertion ne peut pas être vérifiée pour n suffisamment élevé. Il y a donc contradiction avec le caractère DR de G. □

On arrive alors à l'énoncé caractérisant les groupes de Lie connexes possédant la propriété DR.

Théorème 101 [CPS07] *Soit G un groupe de Lie connexe et $\tilde{G}$ son recouvrement universel. On note $\mathfrak{g}$ leur algèbre de Lie. On a l'équivalence :*

1. *$\mathfrak{g}$ s'écrit comme produit direct $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie semi-simple (voire nulle) et $\mathfrak{p}$ est de type R ;*
2. *$\tilde{G} \simeq \tilde{S} \times \tilde{P}$, où les groupes de Lie simplement connexes $\tilde{S}$ et $\tilde{P}$ sont respectivement semi-simple et de croissance polynomiale ;*
3. *G possède la propriété DR.*

Corollaire 102 *Les groupes de Lie semi-simples connexes possèdent la propriété DR.*

Il découle alors des propriétés liant les algèbres de Lie et les groupes de Lie simplement connexes, et de la caractérisation des groupes de Lie de type R par leur croissance polynomiale (théorème 55) l'équivalence entre les propriétés 1. et 2. de l'énoncé précédent 101. L'équivalence avec 3. constitue la caractérisation des groupes de Lie connexes possédant la propriété DR.

Démonstration du théorème 101. En conséquence directe du théorème 100 et de l'alternative 85, la proposition 3. implique la proposition 1.

Montrons pour conclure que la proposition 2. implique la proposition 3. Soit G un groupe de Lie connexe dont le recouvrement universel $\tilde{G}$ s'écrit $\tilde{G} \simeq \tilde{S} \times \tilde{P}$, avec $\tilde{S}$ semi-simple et $\tilde{P}$ à croissance polynomiale. On va montrer que G est l'extension d'un groupe possédant la propriété DR par un groupe de distorsion polynomiale. On pourra alors conclure par le théorème 98.

Déjà, on rappelle quelques propriétés classiques du recouvrement universel d'un groupe de Lie connexe : $G \simeq \tilde{G}/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe discret central de $\tilde{G}$. Ensuite, comme $\tilde{S}$ est semi-simple, son centre $Z(\tilde{S})$ est discret, et le centre de $\tilde{S}/Z(\tilde{S})$ est trivial [Kna02]. Alors, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{G} \arrow[d, "p_\Gamma"'] \arrow[dr, "p_Z"] & \\
G \simeq \tilde{G}/\Gamma \arrow[r, "p"'] & \tilde{G}/Z(\tilde{G})
\end{tikzcd}$$

Comme $Z(\tilde{G})/\Gamma$ est central dans $\tilde{G}/\Gamma$, on a ainsi une extension centrale

$$1 \longrightarrow Z(\tilde{G})/\Gamma \longrightarrow G = \tilde{G}/\Gamma \longrightarrow \tilde{G}/Z(\tilde{G}) \longrightarrow 1$$

On remarque que

$$\tilde{G}/Z(\tilde{G}) \simeq \tilde{S}/Z(\tilde{S}) \times \tilde{P}/Z(\tilde{P})$$

possède la propriété DR car le premier terme du produit la possède par semi-simplicité à centre trivial (théorème 78), le second par croissance polynomiale (en effet, ce groupe est moyennable d'après le théorème 44, et la moyennabilité ajoutée à la croissance polynomiale impliquent la propriété DR par le théorème 61) ; on rappelle qu'un produit direct de groupes possédant la propriété DR la possède (théorème 16).

Pour conclure, il reste à montrer la distorsion polynomiale de $Z(\tilde{G})/\Gamma$ dans $\tilde{G}/\Gamma$ (le caractère fermé est évident vu la suite exacte). Le lemme 91 montre que $Z(\tilde{S})$ n'est pas distordu en $\tilde{S}$, cette propriété se conservant par le passage au quotient (lemme 92). $\tilde{P}$ étant un sous-groupe fermé du groupe de Lie connexe $\tilde{G}$ et à croissance polynomiale, sa distorsion est alors polynomiale [Var99]. On conclut en remarquant que la distorsion polynomiale se conserve par produit direct. □

Exemple 103

- $SL_n(\mathbb{R})$ possède la propriété DR par semi-simplicité ;
- $GL_n^+(\mathbb{R})$ possède la propriété DR. En effet, $\mathfrak{gl}_n = \mathbb{R} \times \mathfrak{sl}_n$. En conséquence, $GL_n(\mathbb{R})$ possède aussi la propriété DR ;
- le sous-groupe Sol de $GL_3(\mathbb{R})$ (exemple 62) est unimodulaire résoluble, mais ne possède pas la propriété DR vu sa croissance exponentielle (il n'est pas de type R). C'est donc un B-groupe. On peut le vérifier directement, comme dans l'exemple 82 avec $l = (1, -1)$.

Remarque 104 On remarquera que la nécessité d'unimodularité d'un groupe pour posséder la propriété DR ne figure pas dans l'énoncé du théorème 101. Elle est contenue implicitement car un groupe de Lie semi-simple est unimodulaire, ainsi qu'un groupe de Lie de type R. Similairement, la moyennabilité, qui possède des liens directs avec la propriété DR, n'apparaît pas dans le théorème final. On pouvait l'envisager car la propriété DR est compatible à la fois avec la moyennabilité et la non-moyennabilité.

Conclusion

Ce travail a mis en évidence la classification précise des groupes de Lie connexes possédant la propriété DR par CHATTERJI, PITTET et SALOFF-COSTE [CPS07]. L'énoncé final s'écrit sous une forme relativement simple. En revanche, la démonstration fait appel à des techniques de domaines variés : algèbre (norme d'opérateurs, classification d'algèbres. . .), géométrie (croissance de groupes), analyse algébrique (convolution sur groupes, fonctions sphériques. . .). En particulier, elle repose sur un résultat non élémentaire d'analyse inspiré par les probabilités et notamment les marches aléatoires (théorème 99). L'intervention de ce dernier résultat peut apparaître surprenante, voire inopinée. En effet, le problème initial concerne des normes de convoluteurs, et est donc de nature plutôt algébrique. *A priori*, une démonstration plus naturelle, utilisant uniquement des arguments algébriques, est attendue. On peut ainsi s'interroger sur l'obtention d'une telle démonstration.

Bibliographie

[Ank87] J. P. Anker, *La forme exacte de l'estimation fondamentale de Harish-Chandra*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **305** (1987), 371–374.

[CGH94] M. Cowling, S. Giulini, A. Hulanicki et G. Mauceri, *Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certain groups of exponential growth*, Studia Math. **111** (1994), 103–121.

[CPS07] I. Chatterji, C. Pittet et L. Saloff-Coste, *Connected Lie groups and property RD*, Duke Mathematical Journal **137** (2007), 511–536.

[GaV88] R. Gangolli et V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*, Springer-Verlag (1988).

[Gre69] F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand (1969).

[Gui73] Y. Guivarc'h, *Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques*, Bull. Soc. Math. France **101** (1973), 333–379.

[Haa79] U. Haagerup, *An example of a non-nuclear algebra, which has the metric approximation property*, Invent. Math **50** (1978/79), no. 3, 279–293.

[Hel84] S. Helgason, *Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, Academic Press (1984).

[Jen73] J. W. Jenkins, *Growth of connected locally compact groups*, J. Fonc. Analysis **12** (1973), 113–127.

[JiS96] R. Ji et L. B. Schweitzer, *Spectral invariance of smooth crossed products, and rapide decay locally compact groups*, K-theory **10** (1996), 283–305.

[Jol90] P. Jolissaint, *Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 167–196.

[Keh84] E. T. Kehlet, *Cross sections for quotient maps of locally compact groups*, Math. Scand. **55** (1984), 152–160.

[Kna02] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction, seconde édition*, Birkhäuser (2002).

[Lep68] H. Leptin, *On locally compact groups with invariant means*, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 489–494.

[Var96] N. T. Varopoulos, *Analysis on Lie groups*, Rev. Math. Iberoamericana **12** (1996), 791–917.

[Var99] N. T. Varopoulos, “Distance distortion on Lie groups” in *Random walks and discrete potential theory (Cortona, 1997)*, Sympos. Math. **39**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999), 320–357.